

Problemy oceny alternatyw w warunkach niepewności

Statystyczne metody oceny alternatywy

Rozpatrzmy sytuacje, w których decyzja pociąga za sobą korzyść lub stratę. Tę sytuację nazywać będziemy problemem decyzyjnym, a sposób, w jaki określa się najlepszą w danej sytuacji decyzję, czyli inaczej mówiąc, rozwiązuje ten problem – analizą decyzyjną (lub procesem decyzyjnym albo procesem podejmowania decyzji).

Niezależnie od tego, jak problem decyzyjny jest sformułowany, czego dotyczy i jakie są kryteria wyboru decyzji najlepszej, zawsze występują w nim pewne elementy wspólne dla wszystkich problemów.

Po pierwsze, musi występować podejmujący decyzję (decydent), a więc podmiot, osoba czy też grupa osób.

Po drugie, podejmujący decyzję musi znać wszystkie możliwe do podjęcia decyzje, które wiążą się z danym problemem decyzyjnym. Te możliwe, wykluczające się nawzajem decyzje nazywają się decyzjami dopuszczalnymi.

Jeśli oznaczymy je przez a_1, a_2, \dots , to zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ jest zbiorem decyzji dopuszczalnych. Oczywiście, żeby można było mówić o problemie decyzyjnym, muszą istnieć co najmniej dwie decyzje dopuszczalne. Przykładowymi decyzjami dopuszczalnymi związanymi z różnymi problemami decyzyjnymi mogą być:

- wychodząc z domu w pochmurny dzień, wziąć ze sobą parasol bądź go nie brać;
- reklamować bądź nie reklamować jakiegoś produktu;
- zainwestować posiadane pieniądze w akcje lub obligacje, albo też trzymać je na długoterminowym rachunku bankowym;
- kupić akcje spółki A albo spółki Z.

Po trzecie, istotnym elementem problemu decyzyjnego jest zbiór stanów natury (stanów świata zewnętrznego), który będziemy oznaczać przez $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. Stany natury to czynniki, które nie są kontrolowane przez podejmującego decyzję, a które wpływają na rezultat (wynik) podjętej decyzji.

Założono, że liczba stanów natury jest skończona oraz, że wszystkie możliwe stany natury są znane i uwzględnione w analizie problemu decyzyjnego oraz że żadne dwa stany natury nie mogą występować równocześnie.

Pozytywny lub negatywny wynik, odpowiadający konkretnej parze: decyzja a_i oraz ocena stanu natury s_j , nazywa się wypłatą lub korzyścią. Zakłada się, że wszystkie wypłaty, oznaczone przez k_{ij} , również są znane.

Aby dokonać oceny, która decyzja jest lepsza, a która gorsza (przy danym stanie natury), należy porównać korzyści z nich wynikające. Wypłata związana z daną decyzją musi być zatem odpowiednio zmierzona. Wielkość używana do pomiaru i wyrażenia wypłaty nazywana jest zmienną celu. Zmienna ta odzwierciedla cel działania, dla którego osiągnięcia poszukuje się rozwiązania problemu decyzyjnego. Na przykład, jeśli celem podejmującego decyzję o przeprowadzce z Warszawy do innego miasta jest podjęcie pracy dającej najwyższy dochód, wypłata związana z różnymi decyzjami będzie wyrażona w złotych. Jeśli natomiast takim celem jest uzyskanie mieszkania o największej powierzchni - wypłata będzie wyrażona w metrach kwadratowych itp.

Jak zatem widać, problem decyzyjny zdefiniowany jest przez następujące elementy:

- decyzje dopuszczalne,
- stany natury,
- wypłaty,
- zmienną celu.

Wybór decyzji następuje poprzez ocenę korzyści wynikających z różnych decyzji przy różnych stanach natury, a następnie wskazanie najlepszej (optymalnej) korzyści. Nie musi to być najwyższa wypłata, gdyż wybór najlepszej z nich zależy od przyjętego kryterium czy też strategii podejmowania decyzji. Wiąże się to również z wiedzą podejmującego decyzje o możliwości wystąpienia poszczególnych stanów natury. Problem decyzyjny przedstawiono w postaci tzw. tablicy korzyści (wypłat) zwanej również macierzą korzyści (wypłat). Tablica wypłat zawiera wartości wypłat k_{ij} , związane z i -tą decyzją i j -tym stanem natury.

Decyzje	Stany natury			
	s_1	s_2	...	s_m
a_1	k_{11}	k_{12}	...	k_{1m}
a_2	k_{21}	k_{22}	...	k_{2m}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
a_n	k_{n1}	k_{n2}	...	k_{nm}

Jak zatem widać, tablica wypłat zawiera wszystkie elementy problemu decyzyjnego.

Może się jednak zdarzyć, że nie będzie takiej decyzji, która byłaby najlepsza przy każdym stanie natury. Nie wiadomo przecież z góry, który ze stanów natury wystąpi. Zatem, dla podjęcia decyzji potrzebny jest wybór strategii w rozwiązywaniu problemu decyzyjnego, czyli wyboru kryterium, według którego przeprowadzana jest analiza decyzyjna.

Dla dalszej analizy potrzebne jest wprowadzenie dodatkowych pojęć.

Pierwszym z nich jest pojęcie decyzji zdominowanej. Mówimy, że decyzja a_r jest zdominowana, jeśli istnieje jakaś inna decyzja a_s , która dla każdego ze stanów natury daje wypłaty nie mniejsze niż decyzja a_r . Oznacza to, że decyzja a_r nigdy nie będzie optymalna, a zatem można ją, bez szkody dla rozwiązania problemu decyzyjnego, usunąć z analizy.

Następnym pojęciem, ściśle związanym z wypłatą (korzyścią), jest strata możliwości wynikająca z podjęcia konkretnej decyzji a_i . Przy danym stanie natury s_j strata możliwości związana z decyzją a_i jest określona przez różnicę między maksymalną możliwą wypłatą dla tego stanu natury s_j , a wypłatą k_{ij} odpowiadającą j -temu stanowi natury i decyzji a_i .

Ogólnie strata możliwości M_{ij} wynosi:

$$M_{ij} = (\max_i k_{ij}) - k_{ij}; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Podobnie jak wypłaty, straty możliwości dla każdej pary (a_i, s_j) przedstawiane są w postaci tablicy. Obie tablice, strat możliwości i wypłat, zawierają wszystkie elementy niezbędne dla analizy decyzyjnej.

Opiszemy warunki, w jakich decyzje są podejmowane. Warunki te określone są przez wiedzę podejmującego decyzje o stanach natury, wpływających na efekt decyzji. Jeśli wiadomo, że zbiór stanów natury składa się tylko z jednego elementu, czyli jeśli podejmujący decyzję ma pewność co do tego, jaki stan natury wystąpi, wtedy mamy do czynienia z podejmowaniem decyzji w warunkach pewności, tzn. deterministycznym typem analizy decyzyjnej. Jest to najprostszy przypadek, gdyż decydent musi wybrać spośród dostępnych tą decyzję, która maksymalizuje jego cel działania.

W rzeczywistości mamy również do czynienia ze znacznie bardziej skomplikowanymi problemami decyzyjnymi w deterministycznej wersji, gdy: zbiór decyzji jest nieskończony, sformułowane są pewne warunki ograniczające wybór decyzji, istnieje wiele kryteriów (celów) decyzji. Do rozwiązywania takich zagadnień stosuje się odpowiednie (matematyczne) metody optymalizacyjne.

Drugim typem analizy decyzyjnej jest podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka. Z taką sytuacją mamy do czynienia, kiedy podejmującemu decyzję znany jest rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury, który może wynikać z teoretycznych założeń lub być rozkładem empirycznym obserwowanym w przeszłości, może też wynikać z subiektywnej oceny podejmującego decyzję, co do szansy wystąpienia poszczególnych stanów natury.

Trzeci typ analizy to podejmowanie decyzji w warunkach niepewności. Wiąże się on z sytuacją, kiedy podejmujący decyzje nie ma żadnych informacji o prawdopodobieństwie realizacji stanów natury. Występuje to wówczas, gdy na przykład dany problem decyzyjny rozważany jest po raz pierwszy i nie można oprzeć się na wcześniejszym doświadczeniu.

W rzeczywistości nawet wtedy podejmujący decyzję zwykle przypisuje subiektywnie prawdopodobieństwo wystąpienia poszczególnych stanów natury. Można, zatem nie wprowadzać rygorystycznego rozróżniania między warunkami ryzyka oraz warunkami niepewności i używać określenia „podejmowanie decyzji w warunkach niepewności” dla niedeterministycznych przypadków.

Przy analizie decyzyjnej w warunkach niepewności przyjmuje się, iż podejmujący decyzję działa w pewnym środowisku, w którym nie występuje żaden konkurencyjny podmiot podejmujący decyzję, który mógłby wpływać świadomie na stany natury lub wynik decyzji. Takie przypadki są przedmiotem rozważań teorii gier.

Kryteria podejmowania decyzji

Po określeniu struktury problemu decyzyjnego i zbudowaniu tablicy wypłat lub strat możliwości, która zawiera dane niezbędne dla analizy decyzyjnej, można przystąpić do poszukiwania rozwiązania problemu decyzyjnego. Rozwiązanie to można znaleźć, jeśli wcześniej określone są reguły dochodzenia do decyzji optymalnej. Reguł takich jest wiele i w dużym stopniu wybór jednej z nich zależy od podejmującego decyzję - jego wcześniejszych doświadczeń, wiedzy na temat stanów natury, a także skłonności do ryzyka.

Najczęściej stosowane reguły wyboru decyzji, z punktu widzenia różnych możliwych kryteriów podejmowania decyzji

- **Kryterium Hurwicza (maksymaksowe)**

Według tego kryterium należy wybrać tę decyzję, której odpowiada największa wypłata. Kryterium to wyraża skrajnie optymistyczne zachowanie podejmującego decyzję. U podstaw tego kryterium leży bowiem założenie, że wystąpi najkorzystniejszy ze stanów natury.

- **Kryterium Walda (maksyminowe)**

Reguła postępowania związana z tym kryterium to poszukiwanie najpierw najgorszej wypłaty dla każdego wariantu (a_1, a_2, \dots, a_n), potem zaś najwyższej spośród tych najgorszych. Ta maksymalna z minimalnych wypłat wyznacza decyzję optymalną.

Kryterium to wyraża zachowawczą strategię postępowania i jest użyteczne w sytuacjach, kiedy należy unikać dużych strat lub zagwarantować, co najmniej pewien minimalny zysk. Wynika ona z przyjętego przez podejmującego decyzję założenia, że niezależnie od tego, jaka decyzja zostanie podjęta, i tak wystąpi najgorszy stan natury.

- **Kryterium Savage'a (minimaksowe)**

Używając tego kryterium, nie wykorzystuje się wartości wypłat, lecz wartości strat możliwości w danym problemie decyzyjnym. Aby dokonać wyboru najlepszej decyzji, należy zatem najpierw określić maksymalną stratę możliwości dla każdego wariantu, a następnie wybrać tą decyzję, której odpowiada najmniejsza z tych maksymalnych strat. Stosując tę regułę postępowania, bierze się pod uwagę raczej możliwe koszty, niż możliwe zyski w celu minimalizacji największych potencjalnych kosztów związanych z każdą decyzją. Jest to strategia pesymisty, który rozpatruje wyłącznie najgorsze wyniki (najwyższe straty możliwości) każdej decyzji.

W dotychczas omawianych strategiach podejmowania decyzji pomijana była zupełnie kwestia szansy wystąpienia poszczególnych stanów natury, a przecież przy podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności może to mieć zasadnicze znaczenie dla uzyskania określonej wypłaty (straty możliwości).

Poniżej przedstawiono kilka reguł podejmowania decyzji, w których uwzględnia się rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury.

- **Kryterium Laplace'a**

Przy tej regule zakłada się, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne, najlepszą zaś decyzją jest ta, której odpowiada najwyższa oczekiwana wypłata.

Kryterium Laplace'a często jest stosowane wówczas, gdy podejmujący decyzję nie zna rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury - naturalne wydaje się wtedy przyjęcie założenia, że są one jednakowo prawdopodobne. Jest to jednak ryzykowne, gdyż jeśli rozkład ten wyraźnie odbiega od równomiernego, można uzyskać zupełnie błędne rozwiązanie problemu decyzyjnego. Kryterium Laplace'a powinno być w takich okolicznościach stosowane z dużą ostrożnością.

Jest to pierwsza wśród omawianych reguł postępowania, w której bierze się pod uwagę wartości wszystkich możliwych wypłat w danym problemie decyzyjnym.

Jest to również istotna cecha dwóch następnych kryteriów uwzględniających rozkład prawdopodobieństwa stanów natury. Określenie tego rozkładu może wynikać z pewnej teorii lub, jeśli dana sytuacja jest powtarzalna, może on być oszacowany na podstawie danych empirycznych z przeszłości. Często jednak podejmujący decyzję nie dysponuje ani odpowiednią teorią, ani danymi z przeszłości. Ale i w takich okolicznościach może on przyporządkować prawdopodobieństwa poszczególnym stanom natury na podstawie swoich subiektywnych opinii, doświadczenia itp. Ponieważ, tak czy inaczej, podejmujący decyzję zwykle ulegają w przyjętych strategiach działania swoim subiektywnym odczuciom, rozsądne wydaje się włączenie nawet tak intuicyjnie określonego rozkładu prawdopodobieństwa do analizy decyzyjnej.

Ten - w jakikolwiek sposób określony - rozkład, który wykorzystywany jest na początku procesu podejmowania decyzji, nazywany jest rozkładem prawdopodobieństwa *a priori*. Prawdopodobieństwo *a priori* wystąpienia stanu natury s_j będziemy oznaczać przez p_j . Kryteriami, przy których wykorzystuje się te prawdopodobieństwa w procesie podejmowania decyzji są: kryterium oczekiwanej wypłaty (zwane również kryterium oczekiwanej wartości pieniężnej lub kryterium Bayesa) oraz kryterium oczekiwanej straty możliwości.

W pierwszym przypadku, chodzi oczywiście o maksymalizację oczekiwanej wypłaty, w drugim natomiast – o minimalizację oczekiwanej straty możliwości. Oba kryteria są równoważne w tym sensie, że dają to samo optymalne rozwiązanie problemu decyzyjnego.

- **Kryterium oczekiwanej wypłaty (OW)**

Według tego kryterium decyzją optymalną jest ta, której odpowiada największa oczekiwana wypłata. Oczekiwana wypłata związana z decyzją a_i wyznacza się za pomocą wzoru:

$$OW_i = \sum_{j=1}^m k_{ij} p_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

gdzie p_j jest prawdopodobieństwem wystąpienia stanu natury s_j .

- **Kryterium oczekiwanej straty możliwości (OSM)**

Kryterium to jest równoważne kryterium oczekiwanej wypłaty, z tą różnicą, że dla rozwiązania problemu decyzyjnego bierze się pod uwagę koszty, a nie zyski. Reguła postępowania określona przez to kryterium polega na wyznaczeniu oczekiwanej straty możliwości OSM_i dla każdej decyzji a_i , potem zaś wybraniu tego wariantu, któremu odpowiada najmniejsza wartość oczekiwanej straty możliwości.

Oczekiwana strata możliwości dla decyzji a_i określona jest wzorem:

$$OSM_i = \sum_{j=1}^m M_{ij} p_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

gdzie p_j , jak poprzednio, jest prawdopodobieństwem wystąpienia stanu natury s_j .

Strategia maksymalizacji oczekiwanej wypłaty (minimalizacji oczekiwanej straty możliwości) jest jedną z najczęściej stosowanych w poszukiwaniu optymalnego rozwiązania problemu decyzyjnego. Wymaga ona jednak pewnych komentarzy.

Po pierwsze, w oczywisty sposób wybór najlepszej decyzji zależy od rozkładu prawdopodobieństwa *a priori* stanów natury. Przyporządkowanie tych prawdopodobieństw poszczególnym stanom musi mieć zatem uzasadnienie, gdyż nieodpowiedni ich wybór może prowadzić do złej decyzji.

Po drugie, oczekiwana wartość wypłaty nie stanowi żadnej konkretnej możliwej wypłaty. Zgodnie z interpretacją wartości oczekiwanej wyraża ona przeciętną wypłatę, którą podejmujący decyzję otrzymałby, gdyby wielokrotnie (teoretycznie nieskończenie wiele razy) rozwiązywał w taki sam sposób ten sam problem decyzyjny. Inaczej mówiąc, reguła maksymalizacji oczekiwanej wypłaty ma wyraźny sens przy podejmowaniu decyzji w powtarzalnych sytuacjach.

Ponadto, kryterium oczekiwanej wypłaty nie uwzględnia rozrzutu możliwych wypłat - czyli ich wariacji. Możliwa jest więc sytuacja, gdy podejmujący decyzję o niskiej skłonności do ryzyka wybierze ostrożnie decyzję z niższą oczekiwaną wypłatą, ale i z mniejszym zróżnicowaniem możliwych wypłat. Może się również zdarzyć, że optymalny z punktu widzenia kryterium oczekiwanej wypłaty wariant z bardzo wysoką oczekiwaną wypłatą nie zostanie zaakceptowany, gdyż równocześnie wiąże się z nim możliwość równie dużej straty.

Można jednak założyć, że w którymś momencie procesu decyzyjnego podejmujący decyzję wie, że tym razem z pewnością wystąpi konkretny stan natury s_j – dysponuje on zatem doskonałą informacją i oczywiście wybiera spośród możliwych ten wariant, któremu przy wystąpieniu stanu s_j odpowiada największa wypłata.

Gdyby podejmowanie decyzji przy doskonałej informacji powtarzано wielokrotnie, to (przy danym rozkładzie prawdopodobieństwa stanów natury) oczekiwana wypłata przy wykorzystaniu doskonałej informacji (OWDI) wyniosłaby dla i -tej alternatywy:

$$OWDI = \sum_{j=1}^m p_j \max_i k_{ij}, \quad (4)$$

gdzie p_j jest prawdopodobieństwem wystąpienia stanu natury s_j , $\max_i k_{ij}$ – największa wypłata, związana z tym stanem natury.

Oczekiwana wypłata przy doskonałej informacji wyraża średnią wypłatę, której można się spodziewać, gdyby zawsze przed podjęciem decyzji występowała pewność, co do wystąpienia konkretnego stanu natury.

Jeśli podejmujący decyzje w warunkach niepewności chce dysponować doskonałą informacją, musi ją w jakiś sposób uzyskać - zwykle na podstawie specjalnych badań.

Uzyskanie dodatkowej informacji wiąże się z kosztami dodatkowego badania. W związku z tym nasuwa się pytanie – Jakie koszty opłaca się ponieść podejmującemu decyzję, aby uzyskać doskonałą informację? Maksymalna kwota pieniędzy, jaką w takim przypadku opłaca się na ten cel wydać, nazywana jest oczekiwaną wartością doskonałej informacji (*ODI*). Jest ona zdefiniowana jako różnica między oczekiwaną wypłatą przy doskonałej informacji i maksymalną oczekiwaną wypłatą.

Jeśli maksymalną oczekiwaną wypłatą jest:

$$OW^* = \max_i OW_i \quad (5)$$

to oczekiwana wartość doskonałej informacji określona jest wzorem:

$$ODI = OWDI - OW^* \quad (6)$$

Otrzymana oczekiwana wartość doskonałej informacji ODI jest równa minimalnej oczekiwanej stracie możliwości OSM wyznaczającej optymalną decyzję. Nie jest to przypadkowa zbieżność wyników. W ogólnym przypadku również zachodzi:

$$ODI = OSM^*, \quad \text{gdzie} \quad OSM^* = \min_i OSM_i \quad (7)$$

Przy czym OSM^* jest najmniejszą oczekiwaną stratą możliwości, wyznaczającą optymalną decyzję w danym problemie decyzyjnym. Wynika to z definicji ODI oraz OSM .

Strata możliwości M_{ij} (por. wzór (1)) wyraża potencjalną stratę lub też koszt będący wynikiem tego, że podejmujący decyzję nie wie, co w rzeczywistości się wydarzy i jaki stan natury zaistnieje, a więc jest ona wynikiem warunków niepewności. Minimalna oczekiwana strata możliwości OSM^* wyraża oczekiwany koszt niepewności dla decyzji optymalnej. Oznacza ona zatem równocześnie maksymalną kwotę pieniędzy, jaką podejmującemu decyzję opłacałoby się wydać, aby uzyskać doskonałą informację dla bezbłędnego przewidywania, jakie zdarzenie (stan natury) zaistnieje. Jest to więc, innymi słowy, oczekiwana wartość doskonałej informacji.

Przykład. Właściciel sklepu sprzedającego koszulki z nadrukiem logo SGH musi złożyć zamówienie na te koszulki na nowy rok akademicki. Producent przyjmuje zamówienie na partie zawierające po 200 koszulek. Jeżeli zamawia się jedną partię dwustu sztuk, cena za koszulkę wynosi 10 PLN, przy zakupie dwóch partii jednostkowa cena koszulki wynosi 9 PLN, a przy zakupie trzech lub więcej partii cena ta spada do 8,50 PLN.

Koszulki te w sklepie sprzedawane są podczas roku akademickiego po 12 PLN, natomiast w okresie wakacyjnym pozostałości sprzedawane są za pół ceny (tzn. po 6 PLN). Przy tym, jeżeli sprzedawca zamówi zbyt mało koszulek, ponowne zamówienie w ciągu roku nie jest możliwe. Sprzedawca, upraszczając, przyjmuje również, że popyt na koszulki wyniesie: 200, 300, 400 lub 500 sztuk.

Na podstawie tych danych sprzedawca ma podjąć decyzję o liczbie zakupionych koszulek, a celem jego działania jest osiągnięcie jak najwyższego, w danych warunkach, zysku.

Poszczególne elementy tego problemu decyzyjnego są następujące:

- decyzje dopuszczalne: zakup 1, 2 lub 3 partii koszulek,
- stany natury: popyt na 200, 300, 400 lub 500 koszulek,
- zmienna celu: zysk (w PLN),
- wypłaty odpowiadające poszczególnym kombinacjom decyzji i stanów natury zawarto w tablicy.

Decyzje	Stany natury (popyt na koszulki)			
Zamówienie:	$s_1:200$	$s_2:300$	$s_3:400$	$s_4:500$
$a_1:200$ koszulek	400	400	400	400
$a_2:400$ koszulek	0	600	1200	1200
$a_3:600$ koszulek	-300	300	900	1500

Weźmy pod uwagę np. wypłatę $k_{31} = -300$ PLN, odpowiadającą decyzji o zakupie 600 koszulek, przy popycie na 200 koszulek w ciągu roku akademickiego. Wtedy sprzedawca, kupując 3 partie koszulek, zapłaci za nie odpowiednio $600 \times 8,50$ PLN = 5100 PLN. Równocześnie, po 12 PLN może sprzedać 200 koszulek (łącznie za 2400 PLN), pozostałe zaś 400 sztuk może sprzedać w czasie wakacji po 6 PLN (łącznie za 2400 PLN). Zatem różnica między jego dochodem ze sprzedaży a wydatkiem na zrealizowanie zamówienia wynosi -300 PLN; jest to strata, jaką ponosiłby przy wyborze decyzji a_3 (zakup 600 koszulek) i równocześnie przy wystąpieniu stanu natury S_j (wystąpienie popytu na 200 koszulek).

Jak widać w powyższym przykładzie, nie ma takiej decyzji, która byłaby najlepsza przy każdym stanie natury.