Metoda analizy hierarchii Saaty'ego

Ważnym problemem podejmowania decyzji optymalizowanej jest często występująca hierarchiczność zagadnień. Istnieje wiele heurystycznych podejść do rozwiązania tego problemu, jednak dzisiaj najbardziej popularne jest stosowanie Metody Analizy Hierarchii (MAH) Thomasa Saat'ego (Analytic Hierarchy Process), która na przykład w Stanach Zjednoczonych jest dziś standardem. Uniwersalność metody sprawia, iż znajduje ona zastosowanie na uczelniach, w prywatnych firmach, a nawet w przypadku projektów rządowych. MAH opracowana przez T. Saaty'ego w roku 1977, ma za zadanie wspomagać proces decyzyjny, w którym zachodzi konieczność podjęcia decyzji z uwzględnieniem wielu kryteriów. Metoda ma bardzo szerokie zastosowania - począwszy od ekonomii i bankowości, poprzez logistykę, na szeroko pojętym marketingu skończywszy. Istotnym jest, że prostota i uniwersalność metody pozwala na zastosowanie jej w życiu codziennym np. wybierając najlepszy kredyt, pracownika, kandydata do awansu zawodowego wśród podwładnych, sposobu ogrzewania domu, czy wyceny nieruchomości.

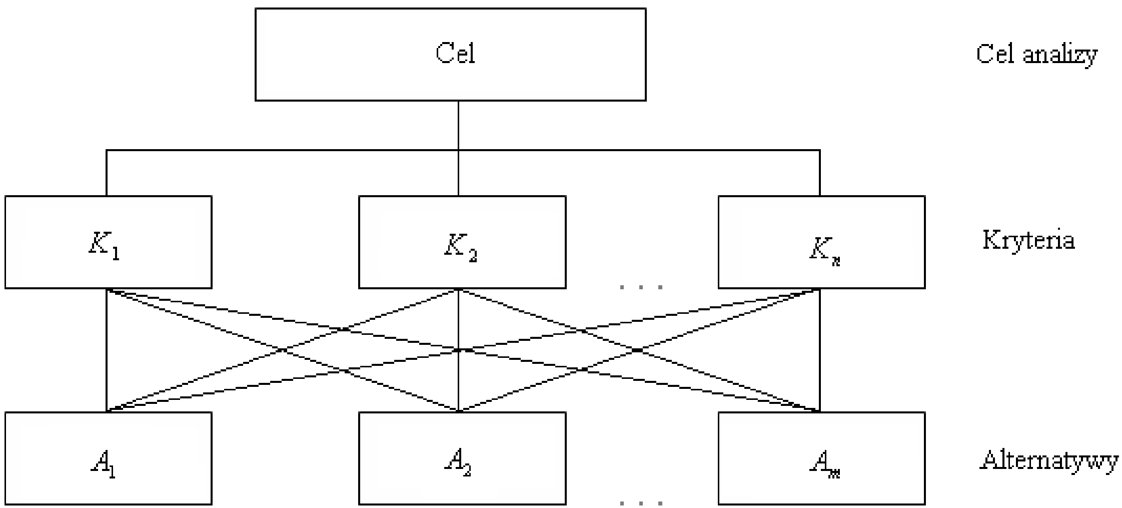
Istota metody polega na hierarchicznym przedstawieniu elementów określających sens rozwiązywanego problemu. Metoda składa się z dekompozycji problemu na coraz prostsze składniki i części, a następnie obróbki szeregu opinii osoby podejmującej decyzję za pomocą metody opartej na tzw. macierzy parzystych porównań. W rezultacie wyliczeń na podstawie macierzy oszacuje się względne stopnie wzajemnych relacji elementów rozpatrywanych hierarchii oraz zostaje wybrana najlepsza z punktu widzenia sformułowanego celu alternatywa.

Algorytm MAH składa się z pięciu podstawowych etapów:

- budowy modelu hierarchicznej struktury decyzyjnej
- oceny ważności kryteriów wyboru,
- oceny alternatyw na podstawie kryterium wyboru,
- sprawdzenia spójności danych,
- oceny alternatyw.

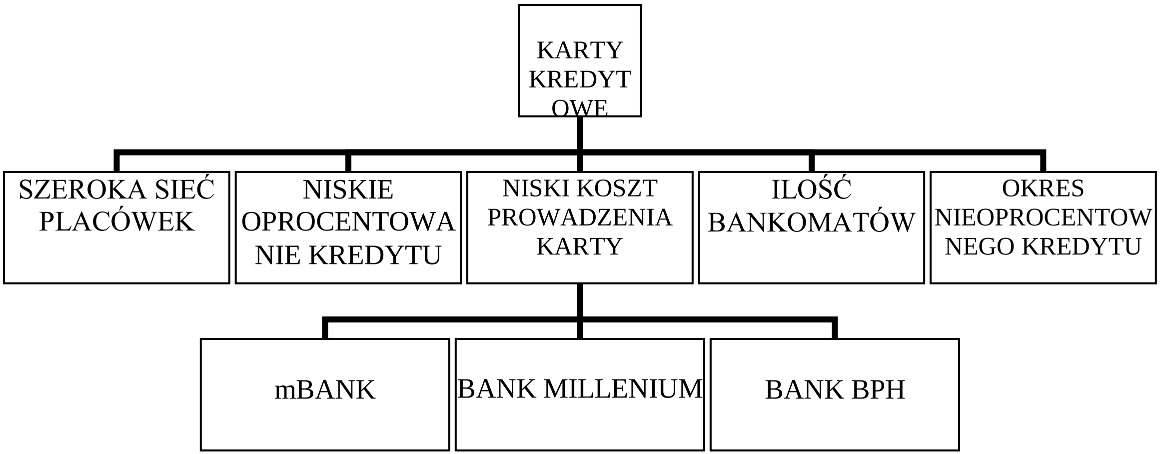
Budowa modelu hierarchicznej struktury decyzyjnej.

W ramach MAH powinien być wykonany rozkład problemu decyzyjnego w postaci hierarchicznej struktury decyzyjnej: określenie celu analizy, zdefiniowanie kryteriów oceny, określenie alternatyw.



Dane do wyboru najlepszej karty kredytowej

	Sieć placówek	Oprocentowanie kredytu	Opłaty	Sieć bankomatów	Okres nieoprocentowanego kredytu
mBank	25	19,90%	50 zl	87	54 dni
Bank Millenium	50	16,90 %	38zl	200	52 dni
Bank BPH	62	21.90%	70zl	150	56 dni


KARTY KREDYTOWE
SZEROKA SIEĆ PLACÓWEK
NISKIE OPROCENTOWANIE KREDYTU
NISKI KOSZT PROWADZENIA KARTY
ILOŚĆ BANKOMATÓW
OKRES NIEOPROCENTOWANEGO KREDYTU
mBANK
BANK MILLENIUM
BANK BPH

Ocena ważności kryteriów wyboru

Porównanie kryteriów odbywa się w parach na podstawie subiektywnego określenia, które z nich i w jakim stopniu przeważa nad drugim. Przyjmuje się przy tym 9-stopniową skalę ocen ważności kryteriów:

- 1 - oba elementy są równoznaczne,
- 2 - jeden element ma niewielką przewagę nad drugim,
- 3- jeden element ma umiarkowaną przewagę nad drugim,
- 4 - jeden element ma silną przewagę nad drugim,
- 5 - jeden element ma znaczną przewagę nad drugim
- 6 - jeden element ma silną przewagę nad drugim,
- 7 - jeden element ma bardzo silną przewagę nad drugim,
- 8- jeden element ma bardzo silną, ale nie absolutną przewagę nad drugim,
- 9 - jeden element ma absolutną przewagę nad drugim.

Oceny kryteriów o relacjach odwrotnych są odwrotne do podanych powyżej ocen. Oceny te tworzą macierz parzystych porównań, w której wierszom i kolumną odpowiadają konkretne elementy modelu hierarchicznej struktury decyzyjnej.

W macierzy tej na głównej przekątnej znajdują się wartości 1. Liczbę porównań, których należy dokonać przedstawia wzór:

$$c = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad (1)$$

gdzie: n - liczba kryteriów

Utworzenie macierzy parzystych porównań kryteriów wiąże się z wyliczeniem ich względnej ważności. W tym celu stosuje się wzór na współczynnik względnej ważności:

$$\alpha_j = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}} \cdot n \qquad (2)$$

Suma współczynników względnej ważności musi być równa lub zbliżona do liczby kryteriów.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \approx n \qquad (3)$$

Macierz parzystych porównań

a_{ij}	K1	K2	K3	K4	K5
K1	1	1/7	1/3	3	1/5
K2	7	1	5	9	3
K3	3	1/5	1	5	1/3
K4	1/3	1/9	1/5	1	1/7
K5	5	1/3	3	7	1

Korzystając ze wzoru (2) liczymy kolejne współczynniki:

$$\sqrt[5]{1 \cdot 1/7 \cdot 1/3 \cdot 3 \cdot 1/5} = 0,491$$

$$\sqrt[5]{7 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3} = 3,936$$

$$\sqrt[5]{3 \cdot 1/5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1/3} = 1$$

$$\sqrt[5]{1/3 \cdot 1/9 \cdot 1/5 \cdot 1 \cdot 1/7} = 0.254$$

$$\sqrt[5]{5 \cdot 1/3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1} = 2,036$$

$$\sum = 7,717$$

$$\alpha_1 = \frac{0{,}491}{7{,}717} = 0{,}064 \cdot 5 = 0{,}32$$

$$\alpha_2 = \frac{3{,}936}{7{,}717} = 0{,}51 \cdot 5 = 2{,}55$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{7{,}717} = 0{,}13 \cdot 5 = 0{,}65$$

$$\alpha_4 = \frac{0{,}254}{7{,}717} = 0{,}33 \cdot 5 = 0{,}165$$

$$\alpha_5 = \frac{2{,}036}{7{,}717} = 0{,}264 \cdot 5 = 1{,}32$$

$$\sum \approx 5$$

Ocena alternatyw na podstawie kryterium wyboru

W tym kroku macierz parzystych porównań alternatyw tworzona jest dla każdego kryterium. Skala ocen ważności alternatyw jest podobna do stosowanej w przypadku oceny ważności kryteriów:

- 1 - oba elementy równoznacznie spełniają kryterium,
- 2 - jeden element z niewielką przewagą nad drugim spełnia kryterium,
- 3 - jeden element z umiarkowaną przewagą nad drugim spełnia kryterium,
- 4 - jeden element z umiarkowanie silną przewagą nad drugim spełnia kryterium,
- 5 - jeden element ze znaczną przewagą nad drugim spełnia kryterium,
- 6 - jeden element z silną przewagą nad drugim spełnia kryterium,
- 7 - jeden element z bardzo silną przewagą nad drugim spełnia kryterium,
- 8 - jeden element z bardzo silną, ale nie absolutną przewagą nad drugim spełnia kryterium,
- 9 - jeden element z absolutną przewagą nad drugim spełnia kryterium.

Oceny alternatyw o relacjach odwrotnych podobnie jak oceny kryteriów są odwrotne do podanych powyżej ocen. Liczba porównań:

$$c = \frac{m(m-1)}{2} \cdot n, \tag{4}$$

gdzie: *n* - liczba kryteriów, *m* - liczba alternatyw.

Macierze parzystych porównań alternatyw wykonuje się tak samo jak dla kryteriów. Wzór na wyliczenie współczynnika względnej ważności:

$$\alpha_j = \frac{\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} a_{ij}}}{\sum_{i=1}^{m} \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} a_{ij}}} \cdot m \tag{5}$$

Suma współczynników względnej ważności jest równa lub bliska liczbie alternatyw:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \approx m \tag{6}$$

Ocena alternatyw dla K1*(szeroka sieć placówek)*

	mBank	Millenium	BPH
mBank	1	1/3	1/5
Millenium	3	1	1/3
BPH	5	3	1

$$\sqrt[3]{1/3 \cdot 1/5} = 0{,}41$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

$$\sqrt[3]{3 \cdot 5} = 2{,}466$$

$$\sum = 3{,}876$$

$$\alpha_1 = \frac{0,41}{3,876} \cdot 3 = 0,317$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3,876} \cdot 3 = 0,774$$

$$\alpha_3 = \frac{2,466}{3,876} \cdot 3 = 1,909$$

$$\sum \approx 3$$

Ocena alternatyw dla K2*(niskie oprocentowanie kredytu)*

	mBank	Millenium	BPH
mBank	1	1/3	3
Millenium	3	1	5
BPH	1/3	1/5	1

$$\alpha_1 = \frac{1}{3,876} \cdot 3 = 0,775$$

$$\alpha_2 = 1,911$$

$$\alpha_3 = 0,314$$

$$\sum \approx 3$$

Ocena alternatyw dla K3*(niski koszt prowadzenia karty)*

	mBank	Millenium	BPH
mBank	1	1/3	3
Millenium	3	1	7
BPH	1/3	1/7	1

$$\alpha_1 = \frac{1}{4{,}121} \cdot 3 = 0{,}728$$

$$\alpha_2 = \frac{2{,}759}{4{,}121} \cdot 3 = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{0{,}362}{4{,}121} \cdot 3 = 0{,}263$$

$$\sum \approx 3$$

Ocena alternatyw dla K4*(ilość bankomatów)*

	mBank	Millenium	BPH
mBank	1	1/7	1/3
Millenium	7	1	5
BPH	3	1/5	1

$$\alpha_1 = 0,243$$

$$\alpha_2 = 2,192$$

$$\alpha_3 = 0,565$$

$$\sum \approx 3$$

Ocena alternatyw dla K5 *(*najdłuższy okres nieoprocentowanego kredytu*)*

	mBank	Millenium	BPH
mBank	1	3	1/5
Millenium	1/3	1	1/7
BPH	5	7	1

$$\alpha_1 = 0{,}565$$

$$\alpha_2 = 0{,}243$$

$$\alpha_3 = 2{,}192$$

$$\sum \approx 3$$

Sprawdzenie spójności danych

Sprawdzenie spójności danych odbywa się przy użyciu współczynnika niespójności i stosunku niespójności. Jest bardzo ważnym etapem budowania algorytmu, ponieważ można sprawdzić czy oceny dla kryteriów i alternatyw są prawidłowo dobrane. Współczynnik niespójności i stosunek niespójności danych sprawdza się za pomocą wzoru (7) i (9) :

$$CI = \frac{\frac{\lambda_{\max}}{n} - n}{n-1} \qquad (7)$$

gdzie: CI - współczynnik niespójności, $\lambda_{\max}$ - maksymalna wartość własna macierzy, n - liczba porównywanych elementów

Maksymalną wartość własną macierzy:

$$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)\cdot \alpha_j\right], \tag{8}$$

gdzie: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ - suma wierszy macierzy parzystych porównań, α_j - współczynnik względnej ważności.

$$CR = \left|\frac{CI}{RI_n}\right|, \tag{9}$$

gdzie: CR - stosunek niespójności, CI - współczynnik niespójności, RI_n - współczynnik losowej zgodności, którego wartość zależny od liczby n porównywanych elementów (tabela 1)

Tabela 1. Współczynnik losowej zgodności RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI_n	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49

Współczynnik *CI* mówi o tym, w jakim stopniu spójnie postępują decydenci przy sporządzaniu macierzy parzystych porównań. Thomas Saaty zasugerował, żeby macierz tą odrzucić i proces ustalania ocen kryteriów i alternatyw podjąć na nowo, gdy *CI* i *CR* przekracza 0,1.

Wyliczamy λ_{max} :

$$(1+7+3+1/3+5)\cdot 0{,}32 = 5{,}227$$
$$(1/7+1+1/5+1/9+1/3)\cdot 2{,}55 = 4{,}558$$
$$(1/3+5+1+1/5+3)\cdot 0{,}65 = 6{,}197$$
$$(3+9+5+1+7)\cdot 0{,}165 = 4{,}125$$
$$(1/5+3+1/3+1/7+1)\cdot 1{,}32 = 6{,}437$$
$$\sum = 26{,}544$$

$\dfrac{\lambda_{max}}{n}$ =26,54/5=5,309, n=5.

$$CI = \frac{5{,}309 - 5}{4} = 0{,}077 < 0{,}1$$

$$CR = \left|\frac{0{,}077}{1{,}12}\right| = 0{,}069 < 0{,}1$$

Wyliczamy λ_{max} odpowiednio dla kolejnych kryteriów.
n=3
Dla $K1$.

$$(1+3+5)\cdot 0,317 = 2,853$$
$$(1/3+1+3)\cdot 0,774 = 3,354$$
$$(1/5+1/3+1)\cdot 1,909 = 2,927$$
$$\sum = 9,134$$

$\frac{\lambda_{max}}{n}$ =9,134/3=3,045

$$CI = \frac{3,045-3}{2} = 0,023 < 0,1$$
$$CR = \left|\frac{0,02}{0,58}\right| = 0,039 < 0,1$$

Dla $K2$.

$$\frac{\lambda_{\max}}{n} = 3{,}038$$

$$CI = \frac{3{,}038 - 3}{2} = 0{,}019 < 0{,}1$$

$$CR = \left|\frac{0{,}019}{0{,}58}\right| = 0{,}032 < 0{,}1$$

....

Ocena alternatyw

Ocena alternatyw odbywa się na podstawie zestawienia współczynników względnej ważności kryteriów wyboru i ocen alternatyw w oparciu o kryterium wyboru. Ocena ta pozwala na wybór najlepszej alternatywy spośród wszystkich rozpatrywanych. Wartości oceny alternatyw określa się przy wykorzystaniu następującego wzoru:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cdot \alpha_{ij}) \qquad (10)$$

gdzie: e_i - wartość oceny i - tej alternatywy, n - liczba kryteriów, α_j - współczynnik względnej ważności j - tego kryterium, α_{ij} - współczynnik względnej ważności i - tej alternatywy dla j - tego kryterium

$$e_1 = 0{,}32 \cdot 0{,}317 + 2{,}55 \cdot 0{,}775 + 0{,}65 \cdot 0{,}728 + 0{,}165 \cdot 0{,}243 + 1{,}32 \cdot 0{,}565 = 3{,}336$$

$$e_2 = 0{,}32 \cdot 0{,}774 + 2{,}55 \cdot 1{,}911 + 0{,}65 \cdot 2 + 0{,}165 \cdot 2{,}192 + 1{,}32 \cdot 0{,}243 = \mathbf{7{,}104}$$

$$e_3 = 0{,}32 \cdot 1{,}909 + 2{,}55 \cdot 0{,}314 + 0{,}65 \cdot 0{,}263 + 0{,}165 \cdot 0{,}565 + 1{,}32 \cdot 2{,}192 = 4{,}569$$

Odpowiedź

Z otrzymanych wyników dostajemy informację, iż najkorzystniejsza dla wybierającego jest oferta e_2, czyli Millenium Bank.

Rozpatrywana MAH posiada dwie poważne wady:

1. Przy zmianie ilości alternatyw niezbędne jest tworzenie wszystkich macierzy dla poziomu alternatyw od nowa. Niestety przy tym nie jest możliwe skorzystanie z informacji otrzymanej wcześniej, co z kolei zmusza do kompletnego przeliczenia wszystkich kryteriów dla wyboru alternatyw od nowa. W przypadku konieczności pracy z dużym i szybko zmieniającym się zbiorem alternatyw (analiza ofert zaproponowanych dużej handlowej firmy) ta wada MAH staje się wadą krytyczną.

2. Przy stosowaniu pierwotnej informacji o alternatywach, niezależnie od tego czy miała ona charakter ilościowy, czy też jakościowy, dla tworzenia macierzy porównań parami cała informacja musi być przekształcona w typ jakościowy, wyrażający jakościowe oceny jednej alternatywy w stosunku do drugiej. Strata informacji ilościowej w tym wypadku może powodować błędne, nawet fatalne rezultaty podczas podejmowanej decyzji.

Przykład.

Jeżeli jeden dom kosztuje $10 tys. a inny $10 mln, wtedy w macierzy porównań parami w kratce odpowiadającej kryterium kosztu najprawdopodobniej pojawi się cyfra 9, odzwierciedlająca silną przewagę pierwszego domu nad drugim pod względem ceny. Z innej strony cena domu $10 mln dla przeciętnie zamożnej rodziny, może być nie tylko mało przyjemna, ale po prostu nie do rozważenia. Jednak przy używaniu MAH przy mniej więcej pożądanych wartościach innych czynników charakteryzujących jakość domu (w praktyce tak powinno być, bo dom o cenie $10 mln musi być względem każdego z kryteriów oprócz finansowego, lepszym od domu kosztującego $10 tyś) może okazać się, że drugi dom, na który rodzinę w ogóle nie stać jest lepszy pod względem kryterium globalnego. Jasne, że takie wyniki analizy są po prostu absurdalne.