

Mariusz GONERA, Ludmiła DYMOWA, Paweł SEWASTJANOW  
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej  
ul. Dąbrowskiego, 73, 42-200 Częstochowa

## PIERWIASTKI ROZMYTE RÓWNAŃ PRZEDZIAŁOWYCH

285 słów

Znaczna część problemów przy modelowaniu procesów, zjawisk w najrozmaitszych dziedzinach sprowadza się do rozwiązywania układów równań liniowych algebraicznych. Dziś można powiedzieć, że problemy ich rozwiązywania w przypadku opisu parametrów przez liczby rzeczywiste są w zasadzie rozwiązane. Jednak w rzeczywistości parametry tych układów równań są często wiadome z dokładnością do przedziałów. Konstatujemy, że, ściśle mówiąc, układ równań, realizujący, na przykład, zagadnienie mechaniki, rozwiązywany za pomocą metody elementów skończonych, ma być przedstawiony w kształcie przedziałowym. Również dotyczy to systemów ekonometrycznych, których parametry mają jawnie przedziałowy charakter już na zasadzie wewnętrznych właściwości metod statystycznych, wykorzystywanych dla ich otrzymania. Problem rozwiązywania równań przedziałowych jest jednym z ważniejszych zagadnień arytmetyki przedziałowej. Mimo, że formalnie rozszerzenie przedziałowe systemów zwykłych z punktu widzenia algebraicznego wydaje się banalnym, konkretne realizacje, na przykład, rozmyto-przedziałowej odmiany procedury Gaussa doprowadzą do znacznego rozszerzenia wynikowych przedziałów. Odnotowana cecha to jest wewnętrzny problem arytmetyki przedziałowej, w związku z czym powstało kilka jej modyfikacji. Wszystkie te sposoby są efektywne w odniesieniu do określonych klas sytuacji. W całości wzrost przedziałów wynikowych całkowicie odzwierciedla rzeczywistość i w istocie odpowiada zasadzie wzrastania nieoznaczoności (entropii). Przyczyną ich powstania jest właśnie dążenie do skonstruowania matematyki przedziałowej, pozwalającej otrzymywać wyniki w formie dosyć wąskich przedziałów. Drugi metodologiczny problem rozwiązywania równań przedziałowych, to problem istnienia zera przedziałowego. W niniejszej pracy zaproponowana została metoda rozwiązywania równań przedziałowych, całkowicie rozwiązująca problem drugi i w znaczącym stopniu problem pierwszy. Naturalny efekt osiąga się w skutku wprowadzenia niektórych ograniczeń, które będziemy nazywali naturalnymi. Przy tym pierwiastki równań przedziałowych otrzymujemy w formie dosyć wąskich przedziałów rozmytych. W niniejszej pracy opisane są ogólne metodologiczne zasady zaproponowanej metody. Metoda została zilustrowana przykładem rozwiązywania układu równań liniowych przedziałowych. Otrzymane wyniki są porównane z wynikami rozwiązywania tego samego zagadnienia przez bezpośrednie rozszerzenie przedziałowe procedury Gaussa.

SŁOWA KLUCZOWE: ranga, liczba przedziałowa, przedziałowa metoda Gaussa

### 1.WPROWADZENIE

Znaczna część problemów przy modelowaniu procesów, zjawisk w najrozmaitszych dziedzinach sprowadza się do rozwiązywania układów równań liniowych algebraicznych. Dziś można powiedzieć, że problemy ich rozwiązywania w przypadku opisu parametrów przez liczby rzeczywiste są w zasadzie rozwiązane. Jednak w rzeczywistości parametry tych układów równań są często wiadome z dokładnością do przedziałów. Na przykład, dobre informatorze właściwości materiałów podają z reguły dane w formie  $m \pm \sigma$ , gdzie  $\sigma$  charakteryzuje się szerokością przedziałów zadanego parametru. Nie będziemy tutaj zagłębiać się w filozofię niepewności danych wejściowych (zwykle jest związana z niedokładnością pomiarów, prognoz,

wpływu zewnętrznego otoczenia itp.). Konstatujemy, że, ściśle mówiąc, układ równań, realizujący, na przykład, zagadnienie mechaniki, rozwiązywany za pomocą metody elementów skończonych, ma być przedstawiony w kształcie przedziałowym. Również dotyczy to systemów ekonometrycznych, których parametry mają jawnie przedziałowy charakter już na zasadzie wewnętrznych właściwości metod statystycznych, wykorzystywanych dla ich otrzymania.

Problem rozwiązywania równań przedziałowych jest jednym z ważniejszych zagadnień arytmetyki przedziałowej [1]. Mimo, że formalnie rozszerzenie przedziałowe systemów zwykłych z punktu widzenia algebraicznego wydaje się banalnym, konkretne realizacje, na przykład, rozmyto-przedziałowej odmiany procedury Gaussa doprowadzą do znacznego rozszerzenia wynikowych przedziałów. Odnotowana cecha to jest wewnętrzny problem arytmetyki przedziałowej, w związku z czym powstało kilka jej modyfikacji. Najbardziej znanymi spośród nich są: arytmetyka przedziałowa z niestandardowym odejmowaniem i dzieleniem [2], uogólniona arytmetyka przedziałowa [3], matematyka segmentowa [4], forma scentrowana [1], MV-forma [5]. Wszystkie te sposoby są efektywne w odniesieniu do określonych klas sytuacji. W całości wzrost przedziałów wynikowych całkowicie odzwierciedla rzeczywistość i w istocie odpowiada zasadzie wzrastania nieoznaczoności (entropii). Przyczyną ich powstania jest właśnie dążenie do skonstruowania matematyki przedziałowej, pozwalającej otrzymywać wyniki w formie dosyć wąskich przedziałów.

Drugi metodologiczny problem rozwiązywania równań przedziałowych, to problem istnienia zera przedziałowego. Na przykład, mamy bazowe rzeczywiste równanie  $f(x) = 0$ . Jego naturalne rozszerzenie przedziałowe [1] może być przedstawione przez zastępstwo zwykłych zmiennych przez zmienne przedziałowe i wszystkich operacji arytmetycznych przez odpowiednie operacje przedziałowe. W wyniku otrzymujemy równania przedziałowe w formie:  $[f]([x]) = 0$ . Ściśle mówiąc, równanie nie ma sensu, ponieważ jego lewa część przedstawia przedział, a prawa – degenerowane zero. Rzeczywiście, jeżeli  $[f]([x]) = [\underline{f}, \bar{f}]$ , to wtedy równanie  $[f]([x]) = 0$  jest prawdziwe tylko, jeśli  $\underline{f} = \bar{f} = 0$ . To znaczy, że przychodzimy do sprzeczności.

W niniejszej pracy zaproponowana została metoda rozwiązywania równań przedziałowych, całkowicie rozwiązująca problem drugi i w znaczącym stopniu problem pierwszy. Naturalny efekt osiąga się w skutku wprowadzenia pewnych ograniczeń, które będziemy nazywali naturalnymi. Przy tym pierwiastki równań przedziałowych otrzymujemy w formie dosyć wąskich przedziałów rozmytych.

Pozostała część niniejszej pracy zorganizowana została w następujący sposób. W sekcji 2 opisane są ogólne metodologiczne zasady zaproponowanej metody. W sekcji 3 metoda została zilustrowana przykładem rozwiązywania układu równań liniowych przedziałowych. Otrzymane wyniki są porównane z wynikami rozwiązywania tego samego zagadnienia przez bezpośrednie rozszerzenie przedziałowe procedury Gaussa.

## **2. METODA ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH PRZEDZIAŁOWYCH**

Aby móc przejść do formułowania metody rozwiązywania układów równań liniowych przedziałowych przedstawimy niektóre podstawy arytmetyki przedziałowej, której szczegóły można znaleźć w prace

[1]. Załóżmy na początku, że liczby przedziałowe  $[x]$  oraz  $[y]$  opiszemy za pomocą przedziałów wartości odpowiednio  $[\underline{x}, \overline{x}]$ , oraz  $[\underline{y}, \overline{y}]$ . Przejmujemy najczęściej używane operacji przedziałowe [1]:

$$\text{dodawanie: } [x]+[y] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}], \quad (1)$$

$$\text{odejmowanie: } [x]-[y] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}], \quad (2)$$

$$\text{mnożenie: } [x]*[y] = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}], \quad (3)$$

$$\text{dzielenie: } [x]/[y] = [x]*(1/[y]). \quad (4)$$

Zawarta w pracy [1] metoda rozwiązywania układów równań liniowych za pomocą metody Gaussa w wersji przedziałowej wygląda w następujący sposób. Niech mamy układ  $n$  zwykłych równań liniowych w postaci macierzowej  $\mathbf{A}*\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Stosując rozkładu macierzy  $\mathbf{A}$  na dwie macierze trójkątne otrzymujemy algorytm dwuprzebiegowy, na który składają się postępowanie wprost, polegające na eliminacji do zer elementów, leżących pod diagonalną macierzy  $\mathbf{A}$ , oraz postępowanie odwrotne. Przedziałowy odpowiednik metody Gaussa buduje się poprzez zastosowanie analogicznych etapów przetwarzania macierzy  $\mathbf{A}$  oraz wektorów  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{b}$ , których elementy składowe będą miały postać:  $[a_{ij}] = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ ,  $[x_i] = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ , oraz  $[b_i] = [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ , przy czym  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . W wyniku rekurencyjnych przekształceń, zgodnie z klasycznym algorytmem Gaussa, otrzymujemy następujący algorytm:

a) Etap postępowania wprost:

$$[m_{ji}, \overline{m}_{ji}] = [a_{ji}, \overline{a}_{ji}] / [a_{ii}, \overline{a}_{ii}]; \quad [a_{jk}, \overline{a}_{jk}] = [a_{jk}, \overline{a}_{jk}] - [m_{ji}, \overline{m}_{ji}] * [a_{ik}, \overline{a}_{ik}]; \quad (5)$$

$$[m_{ji}, \overline{m}_{ji}] = [a_{ji}, \overline{a}_{ji}] / [a_{ii}, \overline{a}_{ii}]; \quad [b_j, \overline{b}_j] = [b_j, \overline{b}_j] - [m_{ji}, \overline{m}_{ji}] * [b_i, \overline{b}_i] \quad (6)$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots, n, j = i+1, \dots; k = i, \dots, n$ .

b) Postępowanie odwrotne:

$$[s, \overline{s}] = \sum_{\substack{i=0, \\ j=i}}^{i=n, j=n} [a_{ij}, \overline{a}_{ij}] * [x_j, \overline{x}_j] \quad (7)$$

$$[x_i, \overline{x}_i] = ([b_i, \overline{b}_i] - [s, \overline{s}]) / [a_{ii}, \overline{a}_{ii}] \quad (8)$$

gdzie:  $i = n, n - 1, \dots, 0$ ;  $j = n, n - 1, \dots, i$ .

gdzie  $[m_{ij}]$ ,  $[s_{ij}]$  – zmienne pomocnicze.

W wyniku otrzymujemy przedziałowy wektor  $[\mathbf{x}] = [[\underline{x}_1, \overline{x}_1], [\underline{x}_2, \overline{x}_2], \dots, [\underline{x}_n, \overline{x}_n]]$ .

Skupimy się na etapie postępowania odwrotnego. Równanie (8) przewiduje wielokrotnie dzielenie wartości przedziałowej przez przedział. Ponieważ, jak wiadomo, operacja dzielenia powoduje znaczne rozszerzenie przedziału wynikowego, proponujemy następujące rozwiązanie tego problemu. Aby wyeliminować z równania dzielenie należy je przekształcić do równoważnej postaci:  $[a] * [x] - [b] = [0]$ , gdzie przez zapis  $[0]$  rozumiemy przedziałową postać zera. Z zasad arytmetyki przedziałowej (1)-(4) wynika, że  $[a, \bar{a}] - [a, \bar{a}] = [a - \bar{a}, \bar{a} - a]$ . To znaczy, że odejmowanie od siebie tej samej wartości daje w wyniku symetryczny wokół rzeczywistej liczby zero przedział. Zgodnie z tą widzą możemy zdefiniować  $[0]$  jako następujący przedział  $[0] = [-y, y]$ , gdzie  $y$  oznaczać będzie symetryczną odchyłkę wokół zera rzeczywistego. Ostatecznie nasze równanie będzie mieć postać:

$$[\underline{a}, \bar{a}] * [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [-y, y] \quad (9)$$

Otrzymane równanie przedziałowe można zgodnie z zasadami arytmetyki przedziałowej przedstawić jako:

$$[\underline{a} * \underline{x}, \bar{a} * \bar{x}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [-y, y] \quad (10)$$

Powyższe równanie może być z kolei rozpisane na dwa równania dotyczące lewych i prawych granic przedziałów biorących w nim udział:

$$\begin{cases} \underline{a} * \underline{x} - \bar{b} = -y, \\ \bar{a} * \bar{x} - \underline{b} = y. \end{cases} \quad (11)$$

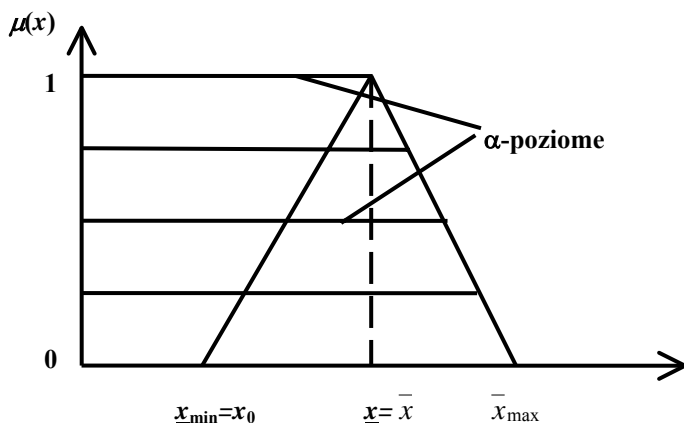
W wyniku tej transformacji otrzymaliśmy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi. Aby uprościć otrzymany układ równań możemy oba równania dodać stronami w wyniku czego otrzymamy jedno równanie liniowe z dwoma niewiadomymi:

$$\underline{a} * \underline{x} - \bar{b} + \bar{a} * \bar{x} - \underline{b} = 0. \quad (12)$$

Należałoby się teraz zastanowić, w jaki sposób możemy otrzymać rozwiązania szczegółowe i w jakiej one będą postaci? W celu rozwiązania równania (11) musimy dodać pewne ograniczenie. Najbardziej naturalnym w przypadku większości zagadnień fizyki albo ekonomiki wygląda ograniczenie typu  $\underline{x} > 0$ , czyli przepuszczenie, że wartość pozyskiwanego przez nas parametru może być wyłącznie dodatniej. Gdy przeanalizujemy równanie (11) mając na uwadze ograniczenie typu  $\underline{x} > 0$ , to dojdziemy do wniosku, że gdy wartość  $\underline{x}$  będzie najmniejsza, czyli  $\underline{x} = 0$ , to  $\bar{x}$  osiągnie wartość maksymalną, z czego wynika, że długość przedziału  $[\underline{x}, \bar{x}]$  będzie największa. Gdy wartość  $\underline{x}$  przesuwając będziemy na prawo od zera to w pewnym momencie rozpiętość przedziału  $[\underline{x}, \bar{x}]$  osiągnie wartość 0, gdyż  $\bar{x}$  przesuwając się w kierunku początku układu współrzędnych zrówna się wartością z  $\underline{x}$ . Oczywiście, że w praktyce  $\underline{x}$  nie obowiązkowo powinno być równym zero. To znaczy, że w ogóle  $\underline{x} = x_0$ , gdzie  $x_0$  – ograniczenie, wynikające z sensu rozwiązywanego problemu. Na pierwszy rzut oka wprowadzenie takiego rodzaju ograniczeń w algebrze liniowej (co prawda, przedziałowej) wygląda dość niezwykle. Jednak wystarczy wspomnieć, że w zagadnieniach programowania liniowego ograniczenia są już niezbędnym elementem zagadnienia. Wprowadzając ograniczenia w naszej sytuacji faktycznie nie zmniejszamy dokładności otrzymanego rozwiązania, ponieważ w realnych zagadnieniach możliwe granice poszukiwanego rozwiązania z reguły są wiadome.

Rozpatrywane przypadki podsuwają rozwiązanie postaci, jaką przyjmie w naszej metodzie wynik dzielenia dwóch przedziałów. W wyniku otrzymamy nie przedział, lecz liczbę rozmytą (ang. fuzzy number) w postaci trójkątnej  $\tilde{x} = [l, m, u]$ , gdzie  $l, m, u$  oznaczają charakterystyczne dla trójkątnej liczby rozmytej parametry:  $l$ -lewa granica,  $u$ -prawa granica,  $m$  - środek przedziału.

Rozważmy procedurę otrzymania rozmytego wyniku, gdy przyjmujemy  $\underline{x} = x_0$ , gdzie  $x_0$  – minimalna możliwa wartość dolnej granicy. Wtedy z równania (12) otrzymamy maksymalną wartość  $\bar{x}$  i z kolei maksymalną szerokość przedziału  $w([\underline{x}]) = \bar{x} - \underline{x} = w_{max}$ . Gdy przesuniemy  $\underline{x}$  na prawo, otrzymamy mniejsze  $\bar{x}$  i mniejszą szerokość przedziałowego rozwiązania  $w$ . Oczywiście względną szerokość przedziału  $w/w_{max}$  możemy traktować jak naturalny względny stopień niepewności przedziałowego rozwiązania. Jeżeli skojarzyć stopień niepewności  $w/w_{max}$  z  $\alpha$ - poziomem liczby rozmytej, możemy przedstawić ciągły zbiór możliwych przedziałowych rozwiązań (równanie (12)) w formie liczby rozmytej, przedstawionej na rys. 1.



Rys. 1. Przedstawienie graficzne rozmytego rozwiązania równania przedziałowego

Z rysunku 1 i równania (12) wynika, że przy  $\bar{x} = \underline{x}$  ( $w=0$ ) mamy minimalną niepewność rozwiązania, czemu w zgodności z zasadami teorii zbiorów rozmytych odpowiada maksymalna wartość  $\alpha = 1$ .

Aby móc porównać wyniki, uzyskane za pomocą klasycznej operacji dzielenia przedziałów, z wynikami, uzyskanymi przy pomocy naszej metody, która ich daje w postaci nie przedziałów, lecz liczb rozmytych, rozpatrzmy przykład dzielenia dwóch przedziałów:  $[b]/[a]$ , gdzie  $[a] = [1, 3]$ ,  $[b] = [3, 5]$ . Dzielenie  $[b]/[a]$  według reguły (4) da w wyniku przedział  $[x] = [1, 5]$ . Wynikiem operacji dzielenia według równania (12) będzie liczba rozmyta  $\tilde{x} = [0, 2, 2.7]$  z nośnikiem  $[x] = [0, 2.7]$ .

Analizując powyższe wyniki, możemy zauważyć, że proponowana przez nas metoda dzielenia przedziałowego ma kilka charakterystycznych cech.

- Uzyskujemy znacznie węższe przedziały wynikowe (szerokość przedziału  $[x]$  równa jest 4, nośnik liczby rozmytej  $\tilde{x}$  ma szerokość 2.7).
- Jądem liczby rozmytej  $\tilde{x}$  jest wartość, która równa się wartości asymptotycznej, równej wyniku dzielenia centrów przedziałów  $[b]$  i  $[a]$ , w naszym przykładzie to:  $4/2 = 2$ . Natomiast centrum przedziału, otrzymanego w wyniku dzielenia klasycznego w naszym przykładzie równe jest 3. To znaczy, że nasze podejście gwarantuje nie tylko mniejsze szerokości przedziałów wynikowych, ale też w odróżnieniu od dzielenia klasycznego zachowywanie poważnych asymptotycznych cech.
- Liczba rozmyta  $\tilde{x}$  w dalszych wyliczeniach może być wykorzystywana albo w tej samej postaci, albo w postaci zwykłego przedziału, którego granicy można łatwo wyliczyć, w zależności od pożądanego stopniu ryzyku, związanego z szerokością wyników przedziałowych.

### 3. ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH PRZEDZIAŁOWYCH

Opracowaną przez nas metodę rozwiązywania równań typu (8) na etapie postępowania odwrotnego w metodzie Gaussa zademonstrujemy na przykładzie przedziałowej macierzy, zawierającej przedziały ujemne i dodatnie różnej szerokości. Macierz (13) zaczerpnięta została z zagadnienia poszukiwania współczynników względnej ważności na podstawie macierzy parzystych porównań [6]. Cechą charakterystyczną tego zadania jest konieczność, aby  $[x_1]$ ,  $[x_2]$ ,  $[x_3]$  były dodatnie, co pozwala wprowadzić naturalne ograniczenia  $\underline{x}_1 = \underline{x}_2 = \underline{x}_3 = 0$ .

$$\begin{bmatrix} [2.112, 2.67] & [-3.9, -2.79] & [-6.25, -4.17] \\ [-3.9, -2.79] & [8.41, 15.58] & [-3.17, -1.9] \\ [-6.25, -4.17] & [-3.17, -1.9] & [20.25, 44.25] \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Równanie macierzowe (13) musi zostać poddane działaniu specjalizowanego algorytmu Gaussa dla liczb przedziałowych, którego propozycję przedstawiliśmy w sekcji 2 niniejszej pracy. Efektem rozwiązania są szukane współczynniki względnej ważności kryteriów szczegółowych (rangi) w postaci trójkątnych liczb

rozmytych. W tabeli 1 przedstawione zostały wyniki rozwiązywania tego samego zagadnienia, uzyskane w postaci zwykłych przedziałów na podstawie algorytmu Gaussa, proponowanego przez Moore'a [1].

TABELA 1. Współczynniki względnej ważności uzyskane z wykorzystaniem zmodyfikowanego algorytmu Gaussa i na podstawie algorytmu Gaussa, proponowanego przez Moore'a [1].

	Nośniki liczb rozmytych, uzyskanych na podstawie zmodyfikowanego przedziałowego algorytmu Gaussa	Przedziały, uzyskane na podstawie klasycznego przedziałowego algorytmu Gaussa
$[x_1]$	[0, 0.84, 0.912]	[0.2, 15]
$[x_2]$	[0, 0.27, 0.356]	[0.1, 7.2]
$[x_3]$	[0, 0.16, 0.189]	[0.08, 0.74]

Łatwo zauważyć, że nośniki liczb rozmytych w kolumnie 2 tabeli 1 są znacznie mniejsze, niż odpowiednie rozstępy przedziałów w kolumnie 3, a to w sposób niepodważalny świadczy o tym, że proponowany przez nas zmodyfikowany przedziałowy algorytm Gaussa jest lepszy od standardowego przedziałowego algorytmu Gaussa, przedstawionego w [1].

## PODSUMOWANIE

Proponowana metoda modyfikowanego dzielenia przedziałów pozwala na rozwiązanie zarówno pojedynczych równań przedziałowych, jak i ich układów. Przy tym wyniki otrzymywane są w postaci liczb rozmytych. Na konkretnym przykładzie pokazano, że dla układu równań liniowych otrzymane nośniki wynikających liczb przedziałowych mają szerokości około dziesięć i więcej razy mniejsze, niż odpowiednie przedziały, wynikające z klasycznego przedziałowego algorytmu Gaussa.

## LITERATURA

- [1] Moore R.E., Interval analysis, Englewood Cliffs. N.J., Prentice-Hall 1966.
- [2] Markov S.M., A non-standard subtraction of intervals, Serdica 1977, 3, 359-370.
- [3] Hansen E., A generalized interval arithmetic. Interval Mathematics/ Ed. by K.Nicke, Lecture Notes in Computer Science, 29, Berlin - Heidelberg: Springer-Verl. 1975, 7-18.
- [4] Sendov B., Some topics of segment analysis, Interval Mathematics, 1980/ Ed. by K.Nickel. N.Y.e.a.: Academic Press 1980, 203-222.
- [5] Caprani O., Madsen K., Mean value forms in interval analysis, Computing 1980, 25, 2, 147-154.
- [6] Mikhailov L., Deriving priorities from fuzzy pairwise comparison judgments, Fuzzy Sets and Systems 2003, 134, 365-385.