Mariusz GONERA
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej
ul. Dąbrowskiego, 73, 42-200 Częstochowa

ROZMYTE WARTOŚCI WIELKOŚCI PRODUKCJI I INTERWAŁOWE WARTOŚCI KOSZTÓW W ANALIZIE WEJŚCIA – WYJŚCIA.

(200 słów)

Współczesne przedsiębiorstwa produkcyjne lub usługowe do efektywnej działalności wymagają istnienia narzędzi ekonomicznych i informatycznych wspomagających proces zarządzania wielkością wymaganej produkcji oraz minimalizujących wszelakie koszty. Takim narzędziem jest z pewnością analiza wejścia-wyjścia sformułowana przez Leontiefa na początku lat 30-tych. Metoda i skojarzony z nią model opisują wzajemne zależności pomiędzy cenami, wielkością produkcji, popytem i podażą w danym systemie ekonomicznym. Analiza wejścia-wyjścia daje możliwość prognozowania wielkości przyszłej produkcji oraz ułatwia szacowanie kosztów działalności przedsiębiorstw, stając się tym samym jedną z klasy metod wspomagających podejmowanie optymalizowanych decyzji ekonomicznych i gospodarczych. W praktycznych zastosowaniach dane opisujące proces produkcyjny zawsze obarczone są niepewnością. Uwzględnienie wspomnianej niepewności wymaga zastosowania specyficznego opisu matematycznego i aparatu informatycznego. Najbardziej skutecznym sposobem uwzględnienia niepewności jest przedstawienie wszystkich parametrów w formie interwałowej lub rozmyto-interwałowej i wykorzystanie odpowiedniej metodologii matematycznej. Mając na uwadze powyższe spostrzeżenia proponujemy w niniejszej pracy interwałowe rozszerzenie klasycznej analizy wejścia-wyjścia, którego rozwiązanie pozbawione będzie konieczności odwracania głównej macierzy interwałowej, zwanej interwałową macierzą produkcyjną. Brak odwracania macierzy będzie możliwy dzięki zastosowaniu, sformułowanej przez nas, zmodyfikowanej metody Gaussa z wyeliminowaną z postępowania odwrotnego operacją dzielenia interwałowego. Zmodyfikowana procedura rozwiązywania interwałowych układów równań umożliwi uzyskanie rozmyto-interwałowych wartości kosztów i wielkości produkcji w przypadku, gdy wszystkie dane wejściowe będą miały postać interwałową.

SŁOWA KLUCZOWE: Analiza Wejścia-Wyjścia, IOA, Liczba Interwałowa, Zmodyfikowana Procedura Gaussa, Interwałowy Model Wejścia-Wyjścia, Interwałowa Tabela Wejścia-Wyjścia

KEYWORDS: Input-Output Analysis, IOA, Interval Number, Modified Gauss Procedure, Interval Input-Output Model, Interval Input-Output Table

1. WPROWADZENIE

Niezwykle efektywnym narzędziem stosowanym przez ponad 60 krajów na świecie do optymalizacji procesów produkcyjnych, poprawy stanu gospodarki i analizy alokacji kosztów międzysektorowych jest, sformułowana przez Leontiefa, analiza wejścia-wyjścia. Została ona początkowo wykorzystana do badania gospodarki Stanów Zjednoczonych [5-6], [8-9]. Analiza wejścia-wyjścia jest sformalizowaną metodą wyjaśniającą zawiłe wzajemne zależności podaży, popytu, nakładów inwestycyjnych oraz kosztów w różnych sektorach złożonych systemów ekonomicznych [7]. Poprzez system ekonomiczny rozumieć możemy zarówno pojedynczą firmę produkcyjną jak i całą gospodarkę jakiegoś państwa. Modele wejścia-wyjścia oparte na takich systemach dostarczają informacji o strukturze połączeń pomiędzy wieloma sektorami i wspomagają ogólny plan produkcyjny. Rozległe prace nad praktycznym wykorzystaniem analizy wejścia-wyjścia [9-13] udowodniły jej wyjątkową przydatność w dziedzinie zarządzania i kontroli kosztów prowadzenia działalności produkcyjno-usługowej. Prace te zostały z czasem rozszerzone o wykorzystanie kosztów związanych z ochroną środowiska i redukcją zanieczyszczeń w ogólnych planach funkcjonowania przedsiębiorstw [12-13]. Wyniki analizy uwzględniającej takie dane umożliwiły zgłębienie wiedzy na temat tego, w jaki sposób optymalnie dzielić koszty pomiędzy sektorami przedsiębiorstw.

Wspomniane wcześniej prace nad modelem i analizą wejścia-wyjścia nie uwzględniały tak wszechobecnej niepewności, która jak obecnie wiadomo, stanowi poważny element składowy wszystkich metod wspomagających podejmowanie decyzji. W praktycznych zastosowaniach nie stosujemy bowiem opisu parametrów za pomocą pojedynczych liczb, lecz przy pomocy pewnych przedziałów zmienności wartości tych parametrów. Aby uwzględnić w jakiś rozsądny sposób niepewność w procesie analizy danych, należy je w odpowiedni sposób przedstawić. Niepewność uwzględniać mogą dane w postaci interwałowej, rozmytej lub stochastycznej (liczby losowe).

Prace nad analizą wejścia-wyjścia uwzględniającą stochastyczną niepewność były prowadzone od początku lat 70-tych. Ujawniły one poważne wady podejść losowych [16-18] w kontekście istnienia konieczności odwracania tzw. głównej macierzy produkcyjnej, które to odwracanie jest jednym z poważniejszych źródeł propagacji niepewności. W związku z ujawnionymi wadami podejść losowych, współczesne badania nad zastosowaniami metody Leontiefa skierowane zostały ku wykorzystaniu liczb interwałowych jako opisu źródeł niepewności. Podstawy interwałowej analizy wprowadził Moore [1], [14], natomiast jej modyfikacje były udziałem Markov'a [2], Hansen'a [3] i Syndov'a[4]. Interwałowy opis parametrów pozwala na elastyczne planowanie produkcji i dynamiczne prognozowanie przedziału prawdopodobnych kosztów. Poza tym, taki opis danych, w odróżnieniu od formy rozmyto-interwałowej, jest bardziej akceptowany przez menadżerów, którzy dostarczają dane do analizy. Znacznie łatwiej jest bowiem w praktyce wyznaczyć minimalną i maksymalną wartość danego parametru niż najmniej i najbardziej prawdopodobne przedziały jego zmienności (co wymagane jest do rozmyto-interwałowego opisu danych wprowadzonego przez L. Zadeh'a).

W niniejszej pracy przedstawione zostanie interwałowe rozszerzenie klasycznego deterministycznego modelu wejścia-wyjścia przekształconego do postaci, która pozbawiona będzie konieczności zastosowania operacji odwracania macierzy interwałowej. Eliminacja odwracania macierzy z interwałowego modelu wejścia-wyjścia była jednym z podstawowych założeń naszej pracy, ponieważ jest ona głównym źródłem propagacji błędów i zwiększania się niepewności wyników (co związane jest z gwałtownym, trudnym w kontroli, rozszerzaniem się szerokości interwałów). Wspomniane problemy rozwiązane zostały poprzez zastosowanie zmodyfikowanej przez nas interwałowej metody rozwiązywania układów równań liniowych. Zmodyfikowana metoda Gaussa umożliwiła uzyskanie rozmytych wartości wielkości produkcji i interwałowych wartości kosztów w sytuacji, gdy wszystkie dane mają postać interwałową. Dane do badań nad skutecznością naszego podejścia zaczerpnięte zostały z pracy [15]. Dotyczą one parametrów pracy przedsiębiorstwa zajmującego się farbowaniem materiałów tekstylnych.

Pozostała część niniejszej pracy została zorganizowana w następujący sposób. W rozdziale 2 przedstawiony jest krótki przykład ilustrujący w jaki sposób odbywa się analiza wejścia-wyjścia. Rozdział 3 zawiera interwałowe rozszerzenie klasycznego modelu wejścia-wyjścia. Rozdział 4 zawiera etapy budowy zintegrowanej interwałowej tabeli wejścia-wyjścia. W rozdziale 5 proponujemy metodę rozwiązania interwałowego modelu wejścia-wyjścia. Rozdział 6 zawiera końcowe wnioski i spostrzeżenia.

2. PROSTY PRZYKŁAD ILUSTRUJĄCY FUNKCJONOWANIE KLASYCZNEJ ANALIZY WEŚCIA-WYJŚCIA

Zamiast opisu zasad funkcjonowania klasycznej analizy wejścia-wyjścia operującej na liczbach rzeczywistych, postanowiliśmy przedstawić krótki przykład dotyczący przypadku gdy model ekonomiczny, poddawany analizie, opisany jest poprzez trzy sektory (Tabela 1) (Kempner 1987). Sektor A opisuje rolnictwo, sektor B dotyczy produkcji przemysłowej, natomiast sektor C zawiera dane o produkcji gospodarstw domowych. Sposób budowy zintegrowanej tabeli, stanowiącej podstawę analizy wejścia-wyjścia zostanie przedstawiony w rozdziale 4.

Tabela 1.
Prosty model wejścia-wyjścia dla trzech sektorów gospodarczych

Sprzedaż (poziomo)	Kupno (pionowo)				Całkowite wyjście
	Sektor A	Sektor B	Sektor C	Przychód zewnętrzny	
Sektor A	-	60	40	100	200
Sektor B	40	-	100	260	400
Sektor C	50	100	-	50	200
Koszty funkcjonowania	110	240	60	-	410
Całkowite wejście	200	400	200	410	1210

Analizując powyższą tabelę możemy zauważyć, że na przykład, Sektor B sprzedaje (przekazuje) towary (lub zasoby finansowe) za 40 [mld $] do Sektora A i za 100 [mld $] do Sektora C, poza tym towary za 260 [mld $] sprzedane zostały do zewnętrznych, innych sektorów. Aby wyprodukować globalną produkcję na poziomie 400 [mld $], Sektor B zmuszony jest nabyć (pobrać) 60 [mld $] w towarach lub usługach od Sektora A i 100 [mld $] od Sektora C. W tabeli uwzględniono również to, że Sektor B zużywa 240 [mld] na koszty funkcjonowania. Zauważyć należy, że działalność wewnątrz Sektora B nie jest brana pod uwagę, co objawia się tym, że na przecięciu wiersza i kolumny odpowiadającym Sektorowi B nie znajdują się żadne wartości – w praktyce znajduje się tam wartość 0. Taki stan rzeczy powoduje zmniejszenie stopnia uszczegółowienia prowadzonej analizy, lecz z drugiej strony pozwala na rozpatrywanie każdego sektora osobno bez konieczności zagłębiania się w wewnętrzną strukturę jego działalności. Całkowite wyjście przyporządkowane do danego sektora zawiera informację o tym jaki dochód przyniósł ten sektor (Sektor B – 400 [mld $]), natomiast całkowite wejście mówi o tym jakie jest zapotrzebowanie danego sektora na surowce, półprodukty lub zasoby finansowe (Sektor B – 400 [mld $]. W ogólnym przypadku te wielkości dla danego sektora mają taką samą wartość (bilans produkcyjny wynosi 0). Zdarzyć się może, że jedna z tych wartości będzie większa. Jeżeli większa będzie wartość całkowitego wyjścia to oznacza, że w sektorze zastosowano strategię ograniczania kosztów przez co bilans jest na korzyść dochodów. W przeciwnym przypadku sektor przynosi straty.

Ze względu na wymogi analizy wejścia-wyjścia należy przekształcić wszystkie wartości w tabeli 1 (oprócz całkowitych wejść, całkowitych wyjść i przychodu zewnętrznego) do postaci współczynnikowej Tabela 2. (procentowy udział podaży i popytu danego sektora w całkowitym popycie i całkowitej podaży).

Tabela 2.
Współczynnikowa postać tabeli wejścia-wyjścia

Sprzedaż (poziomo)	Kupno (pionowo)				Całkowite wyjście
	Sektor A	Sektor B	Sektor C	Przychód zewnętrzny	
Sektor	-	0.15	0.20	100	200
Sektor B	0.20	-	0.50	260	400
Sektor C	0.25	0.25	-	50	200
Koszty robocizny	0.55	0.60	0.30	-	410
Całkowite wejście	200	400	200	410	1210

Klasyczny model wejścia-wyjścia dla analizy wejścia-wyjścia opartej na danych w postaci liczb rzeczywistych [6] może być przedstawiony jako:

$$\boldsymbol{xre} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Mre})^{-1} \times \boldsymbol{qre}, \tag{1}$$

gdzie: ***xre*** – wektor zawierające dane o całkowitej sprzedaży (całkowite wyjście) zwany wektorem podaży, ***qre*** – wektor przychodów zewnętrznych (sprzedaż do zewnętrznych sektorów, nie uwzględnionych w analizie), ***Mre***- główna macierz współczynników, zwana macierzą produkcyjną lub macierzą technologiczną.

Na podstawie danych z tabeli 2 możemy powiedzieć, że:

$$\boldsymbol{Mre} = \begin{bmatrix} 0 & 0.15 & 0.20 \\ 0.20 & 0 & 0.50 \\ 0.25 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (\mathbf{I} - \mathbf{Mre}) = \begin{bmatrix} 1 & -0.15 & -0.20 \\ -0.20 & 1 & 0.50 \\ -0.25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{qre}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 100 & 260 & 50 \end{bmatrix}$$

Aby wyeliminować z równania (1) konieczność odwracania macierzy przekształcamy je do postaci:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Mre}) \times \boldsymbol{xre} = \boldsymbol{qre} \tag{2}$$

Powyższe równanie może być teraz rozwiązane przy pomocy dowolnego algorytmu rozwiązywania układów równań liniowych w postaci macierzowej (dla danych rzeczywistych).
W ten sposób otrzymaliśmy pewien model, który może być w późniejszym czasie wykorzystany do prognozowania zmian podaży i kosztów w poszczególnych sektorach.

Załóżmy dla potrzeb przykładu, że przychód zewnętrzny związany z Sektorem A (rolnictwem) zwiększy się ze 100 [mld \$] do 120 [mld \$]. Chcielibyśmy teraz poznać prognozę tego jak zmienią się ogólne podaże we wszystkich sektorach powiązanych z Sektorem A. Ponadto interesowałaby nas zmiana kosztów działalności sektorów po uwzględnieniu powyższej zmiany w wielkości produkcji. Odpowiedzi na te pytania uzyskamy po zmodyfikowaniu tabeli 2 i po rozwiązaniu równania (2). W wyniku otrzymujmy wektor całkowitych wyjść (całkowitej podaży) $\boldsymbol{xre}^{\boldsymbol{T}} = [xre_i]^T = [222.8 \quad 408.5 \quad 207.8]$. Na jego podstawie możemy oszacować zmianę kosztów funkcjonowania wszystkich sektorów w następujący sposób:

$$lc_i = xre_i \times c_i \tag{3}$$

gdzie: lc_i – wartość kosztu funkcjonowania pojedynczego sektora, xre_i - wartość całkowitej produkcji po ponownym rozwiązaniu równania (2), c_i - procentowy udział kosztu funkcjonowania poszczególnego sektora w jego całkowitej wartości wejścia (zapotrzebowania na różnorakie środki wejściowe).
Na podstawie nowych danych możemy oszacować zmodyfikowane koszty funkcjonowania poszczególnych sektorów, które wynoszą $\boldsymbol{lc}^T = \left[lc_i\right]^T = \left[122.5 \quad 245.1 \quad 62.3\right]$. Zauważamy więc, że dla Sektora A koszty funkcjonowania wzrosły o 12.5 [mld \$], dla Sektora B o 5.1 [mld \$] oraz dla Sektora C o 2.3 [mld \$].

3. INTERWAŁOWA ANALIZA I MODEL WEJŚCIA-WYJŚCIA

Interwałowe rozszerzenie modelu Leontiefa oparte zostało na klasycznym (dla liczb rzeczywistych) modelu wejścia-wyjścia [6]. Przy jego formułowaniu wzorowaliśmy się na pracy badawczej C.C. Wu i N.B. Chang [15]. Rozszerzenie to pociągnęło za sobą konieczność modyfikacji tabeli wejścia-wyjścia, na której ta analiza bazuje, również do postaci interwałowej. Budowa i wygląd najczęściej wykorzystywanej interwałowej tabeli wejścia-wyjścia przedstawia Tabela 3 w rozdziale 4. Proponowany model interwałowy umożliwia pełną analizę najczęściej spotykanych sektorów w przedsiębiorstwach produkcyjnych i usługowych. Towarzysząca mu tabela opisuje główne wejścia (źródła surowców, półproduktów, źródeł finansowania, zobowiązania, amortyzacja) oraz typowe wyjścia (sprzedaż i zapasy). Formułowany model musi być zgodny ze standardem, więc powinien uwzględniać jedno wyjście dla każdego sektora, jedno lub wiele wejść, powinien opierać się na głównej interwałowej, kwadratowej macierzy produkcyjnej zawierającej ustalone w danej chwili współczynniki wejścia-wyjścia, oraz być zależny od tzw. liniowej, jednorodnej funkcji produkcyjnej.
Dla uproszczenia analizy formułowanego modelu na początku przedstawimy wszystkie wymagane oznaczenia:

$x_{i,j}$ – interwałowe współczynniki wejścia-wyjścia określające wymagania wobec produktu i przez sektor j, gdzie $i,j = 1, \dots, m$, m – ilość sektorów lub produktów

$er_{k,j}$ – interwałowe wartości określające tzw. zewnętrzne wejścia (np. zewnętrzne źródła zaopatrzenia) takie jak materiał produkcyjny k wymagany przez sektor produkcyjny j, $k = 1, \dots, l$, gdzie l liczba wejść zewnętrznych, $j = 1, \dots, m$

$t_{h,j}$ – wejście innych zasobów takich jak amortyzacja, ubezpieczenia h wymagane przez sektor j, $h = 1, \dots, g$, gdzie g – liczba pozostałych zasobów, $j = 1, \dots, m$

$xout_i$ – całkowite wyjście (podaż, produkcja) dla sektora (produktu) i, $i = 1, \dots, m$

xin_j – całkowite wejście dla sektora j uwzględniając produkt i, $j = 1, \dots, m$

f_i – końcowa (zewnętrzna) sprzedaż i zapasy produktu i, $i = 1, \dots, m$

Możemy teraz przystąpić do formułowania kompletnego interwałowego modelu wejścia-wyjścia do typowych zastosowań gospodarczych. Elementarne całkowite wyjście odpowiadające danemu sektorowi, opisujące zapotrzebowanie na zasób i jest wyrażone jako suma wszystkich współczynników $x_{i,j}$ dotyczących analizowanego sektora i odpowiedniej wartości końcowego wyjścia f_i :

$$xout_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} + f_i \tag{4}$$

natomiast elementarne całkowite wejście dla sektora j może być przedstawione jako suma wartości wszystkich wejść zasilających produkcję w danym sektorze:

$$xin_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} + \sum_{k=1}^{l} er_{k,j} + \sum_{k=1}^{m} t_{h,j} \tag{5}$$

Aby przejść do formułowania macierzowej postaci interwałowej analizy wejścia-wyjścia musimy podobnie jak to ma miejsce w klasycznym modelu zdefiniować tzw. technologiczne współczynniki wejścia-wyjścia, określające procentowy udział każdego wejścia w całkowitym wejściu dla konkretnego sektora:

$$\nabla a_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{xin_j},\ \nabla er_{k,j} = \frac{er_{k,j}}{xin_j},\ \nabla t_{h,j} = \frac{t_{h,j}}{xin_j}. \tag{6}$$

lub w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{A} = \lfloor \nabla a_{i,j} \rfloor_{n\times n},\ \ \boldsymbol{ER} = \lfloor \nabla er_{k,j} \rfloor_{l\times n},\ \ \boldsymbol{T} = \lfloor \nabla t_{h,j} \rfloor_{m\times n} \tag{7}$$

Na podstawie zależności (6) możemy przekształcić główne równanie (1) interwałowego modelu wejścia-wyjścia do postaci:

$$xout_i = \sum_{j=1}^{n} \nabla a_{i,j} \times xin_j + f_i \tag{8}$$

a następnie zastąpić je macierzowym równoważnikiem:

$$\boldsymbol{xout} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{xin} + \boldsymbol{f} \tag{9}$$

Jeżeli, dla uproszczenia całego toku analizy, założymy, że $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{L}$, przy czym $\boldsymbol{L}$ – określamy jako tzw. interwałową odwrotną, kwadratową macierz Leontiefa, to możemy zapisać, że:

$$\boldsymbol{xout} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{f} \tag{10}$$

Wykorzystując równanie (10) jesteśmy w stanie wyznaczyć prognozę poziomu produkcji dla każdego sektora w firmie, przedsiębiorstwie a nawet w całym państwie biorąc pod uwagę sumaryczny popyt na rynku. Możliwe jest też wyznaczenie (w formie procentowego udziału) wszystkie wymagane wartości dla wejść zewnętrznych i dla wejść innych zasobów w następujący sposób:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{ER} \times (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{T} \times (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}, \tag{12}$$

gdzie: $\boldsymbol{U} = \lfloor u_{k,j} \rfloor_{l\times n}$ i $\boldsymbol{V} = \lfloor v_{h,j} \rfloor_{m\times n}$.

Istnieje również możliwość wyznaczenia tzw. sumarycznych wartości ***tu*** dla wejść zewnętrznych oraz ***tv*** dla wejść innych zasobów, które są wyrażone w odpowiednich jednostkach:

$$\boldsymbol{tu} = \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{f} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{tv} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{f} \tag{14}$$

Gdy założymy, że pe_k, k = 1, ... , l oznaczać będzie jednostkową cenę zasobu dostarczanego do wejścia zewnętrznego k, oraz że po_h, h = 1, ... , g, zawiera informację o jednostkowym koszcie innego zasobu dostarczanego w czasie okresu produkcyjnego, to całkowity koszt tc_j funkcjonowania poszczególnych sektorów j może być wyznaczony na podstawie zależności :

$$tc_j = \left(\sum_{k=1}^{l} pe_k \times u_{k,j} + \sum_{h=1}^{m} po_h \times v_{h,j} \right) \times f_j \tag{15}$$

Wykorzystując tak sformułowany interwałowy model wejścia-wyjścia, można oszacować wielkość produkcji dla wszystkich wyrobów (produktów), koszty funkcjonowania sektorów oraz ilość wymaganych zasobów wejściowych. Mechanizm ten pomaga uniknąć sytuacji nadprodukcji albo nadmiarowego zużycia surowców.

4. BUDOWA I PRAKTYCZNY PRZYKŁAD INTERWAŁOWEJ TABELI WEJŚCIA-WYJŚCIA

Sformułowana powyżej interwałowa analiza wejścia i związany z nią model, opierają się na danych zgromadzonych w specjalnej tabeli, zwanej interwałową tabelą wejścia-wyjścia. Zawiera ona informacje o wielkości produkcji w danym sektorze, o zapotrzebowaniu na poszczególne surowce i półprodukty, ale przede wszystkim jej struktura zawiera schemat połączeń międzysektorowych. Dane do budowy tej tabeli można uzyskać od menadżerów i księgowych instytucji dla której przeprowadzamy analizę.

Typowa interwałowa tabela wejścia-wyjścia, którą można stosować w większości zagadnień gospodarczych, przedstawiona jest w tabeli 3. Jej tworzenie podzielone jest na kilka etapów:

- *budowanie zależności pomiędzy różnymi sektorami*; na tym etapie wszystkie sektory musimy podzielić na dwie grupy: na sektory produkcyjne i sektory usługowe obsługujące sektory produkcyjne lub inne sektory. Na wejścia każdego sektora dostarczane są różnorodne zasoby od których zależy jego funkcjonowanie, natomiast wyjście sektora opisuje poziom jego sprzedaży lub sprzedaży i zapasów.
- *kompletowanie zewnętrznych wejść dla wszystkich sektorów*; Wymagane zewnętrzne wejścia obejmują surowce i inne materiały, takie jak olej napędowy, elektryczność i zasoby wody, które są pośrednio wymagane w trakcie wytwarzania jakiegoś wyrobu. Ta część tabeli wejścia-wyjścia jest przydatna do uzyskania informacji na temat popytu (zapotrzebowania) na wszystkie typy materiałów.

Tabela 3.
Kompletna tabela dla interwałowej gospodarczej analizy wejścia-wyjścia

	Wewnętrzne wyjścia		Końcowe wyjścia	Całkowite wyjście sektora
	Sektor produkcyjny 1, ... , n	Sektor usługowy n+1, ... , m	Sprzedaż i zapasy	
Wewnętrzne wejścia				
Sektor produkcyjny 1 ... Sektor produkcyjny n	$x_{1,1}$ ... $x_{1,n}$ ... ... $x_{n,1}$ ... $x_{n,n}$	$x_{1,n+1}$ ... $x_{1,m}$ ... ... $x_{n,n+1}$ ... $x_{n,m}$	f_1 ... f_n	$xout_1$ ... $xout_n$ (Ilość jednostek)
Sektor usługowy n+1 ... Sektor usługowy m	$x_{n+1,1}$ ... $x_{n+1,n}$ ... ... $x_{m,1}$ ... $x_{m,n}$	0 …… 0 … … … 0 …… 0	0 … 0	$xout_{n+1}$ ... $xout_m$ (Wartość)

Zewnętrzne wejścia				
Materiał produkcyjny 1 … Materiał produkcyjny *k*	$er_{1,1}$ … $er_{1,n}$ … … … $er_{k,1}$ … $er_{k,n}$	0 …… 0 … … … 0 …… 0	0 … 0	(Ilość jednostek)
Półprodukt *k*+1 … Półprodukt *l*	$er_{k+1,1}$ … $er_{k+1,n}$ … … … $er_{l,1}$ … $er_{l,n}$	$er_{k+1,n+1}$ … $er_{k+1,m}$ … … … $er_{l,n+1}$ … $er_{l,m}$	0 … 0	(Wartość)
Wejścia dla innych zasobów				
Pracownik 1 … Pracownik *g*-5	$t_{1,1}$ … 0 0 … 0 0 … $t_{g-5,n}$	0 …… 0 … … … 0 …… 0	0 … 0	(Ilość jednostek)
Pracownik pośredniczący *g*-4	$t_{g-4,1}$ … $t_{g-4,n}$	$t_{g-4,n+1}$ … $t_{g-4,m}$	0	(Wartość)
Ubezpieczenie *g*-3	$t_{g-3,1}$ … $t_{g-3,n}$	$t_{g-3,n+1}$ … $t_{g-3,m}$	0	(Wartość)
Amortyzacja *g*-2	$t_{g-2,1}$ … $t_{g-2,n}$	$t_{g-2,n+1}$ … $t_{g-2,m}$	0	(Wartość)
Premia *g*-1	$t_{g-1,1}$ … $t_{g-1,n}$	$t_{g-1,n+1}$ … $t_{g-1,m}$	0	(Wartość)
Inne zasoby *g*	$t_{g,1}$ … $t_{g,n}$	$t_{g,n+1}$ … $t_{g,m}$	0	(Wartość)
Całkowite wejście dla sektora	xin_1 … xin_n	xin_{n+1} … xin_m		

- *uzupełnianie tabeli wejściami innych zasobów*; Wejścia innych zasobów w przedsiębiorstwie, w związku z celami produkcyjnymi, mogą zawierać informacje o: pensjach zatrudnionych pracowników, amortyzacji urządzeń, ubezpieczeniach, podatkach, premii i itd.
- *skompletowanie wszystkich danych w formie jednej zintegrowanej tabeli wejścia-wyjścia*

Praktyczny przykład kompletnej interwałowej tabeli wejścia-wyjścia ilustruje tabela 4 zaczerpnięta z pracy [15].

Tabela 4. Kompletna interwałowa tabela dla analizy wejścia-wyjścia kosztów i produkcji firm farbujących materiały tekstylne [15].

	Wewnętrzne wyjścia							Końcowe wyjście	Całkowite wyjście dla sektora	Jednostka
	Sektor produkcyjny	Sektor usługowy						Sprzedaż		
	I	II	Sektor finansowy	Sektor biznesu	Sektor inżynierii	Sektor zarządzania	R&D Sektor			
Wewnętrzne wejścia										
Sektor produkcyjny I	0	0	0	0	0	0	0	2300000	2300000	m
Sektor produkcyjny II	0	0	0	0	0	0	0	1500000	1500000	m
Sektor finansowy	[157880,162470]	[94210,96960]	0	0	0	0	0	0	[252090,259430]	$
Sektor biznesu	[171190,188880]	[102160,112720]	0	0	0	0	0	0	[273350,301600]	$
Sektor inżynieryjny	[149950,154300]	[89480,92070]	0	0	0	0	0	0	[239430,246370]	$
Sektor zarządzania	[223230,228380]	[133210,136290]	0	0	0	0	0	0	[356440,364670]	$
R&D sektor	[161300,166560]	[96250,99400]	0	0	0	0	0	0	[257550,265960]	$
Zewnętrzne wejścia										
Materiał 1	[21900,22000]	[9950,10000]	0	0	0	0	0		[31850,32000]	Kg
Materiał 2	[21800,22000]	[10940,11000]	0	0	0	0	0		[32740,33000]	Kg
Materiał 3	[8450,8500]	[18900,19000]	0	0	0	0	0		[27350,27500]	Kg
Materiał 4	[4470,4500]	[3450,3500]	0	0	0	0	0		[7920,8000]	Kg
Materiał 5	[12900,13000]	[16400,17000]	0	0	0	0	0		[29300,30000]	Kg
Materiał 6	[2860,2900]	[6960,7000]	0	0	0	0	0		[9820,9900]	Kg
Materiał 7	[35870,36000]	[14910,15000]	0	0	0	0	0		[50780,51000]	Kg
Środki pomocowe	[3480,3500]	[1760,1800]	0	0	0	0	0		[5240,5300]	Kg
Konserwacja	[3800,4500]	[2400,2600]	0	0	0	0	[1000,1200]		[7200,8300]	$
Paliwo	[550000,560000]	[335000,340000]	0	0	0	0	0		[885000,900000]	$
Materiały piśmiennicze	0	0	[1200,1400]	[250,300]	0	[1400,1500]	[650,800]		[3500,4000]	$
Inne	[150,200]	[150,190]	[220,250]	0	[320,350]	[280,300]	[150,160]		[1270,1450]	$
Inne wejścia										
Pracownik 1	[5750,5800]	[3750,3800]	0	0	0	0	0		[9500,9600]	godziny
Pracownik 2	[62506300]	[3960,4000]	0	0	0	0	0		[10210,10300]	godziny
Pracownik 3	[3130,3200]	[1850,1900]	0	0	0	0	0		[4980,5100]	godziny
Pracownik 4	[4560,4600]	[2860,2900]	0	0	0	0	0		[7420,7500]	godziny
Pracownik pośredni	0	0	[245000, 250000]	[225000, 230000]	[235000, 240000]	[345000, 350000]	[245000, 250000]		[1295000,1320000]	$
Opłaty za usługi	[580000,720000]	[440000,470000]	[2500,2700]	[1000,1200]	[900,1000]	[2300,2500]	[8000,8500]		[1014700,1205900]	$
Amortyzacja	[5300,5500]	[4500,4700]	[70,80]	0	[110,120]	[60,70]	[450,500]		[10490,10970]	$
Premie	[1000,3000]	[1000,2500]	[0,1500]	[0,1600]	[0,1300]	[0,1500]	[0,2000]		[2000,13400]	$
Opłaty kontraktowe	[2500,3000]	[2300,2800]	0	[40000, 60000]	0	[3500,4000]	0		[48300,69800]	$
Opłaty za telefon	0	0	[1300,1500]	[4000,5000]	[800,1000]	[2500,3000]	[600,800]		[9200,11300]	$
Ubezpieczenie	[3500,4000]	[3500,3600]	[900,1000]	[1300,1500]	[1400,1500]	[900,1000]	[700,800]		[12200,13400]	$
Kontrola zanieczyszczeń	[830000,890000]	[610000,640000]	0	0	0	0	0		[1440000,1530000]	$
Zanieczyszczenie wody	[443871,542555]	[348756,426293]	0	0	0	0	0		[792627,968848]	$
Zanieczyszczenie powietrza	[21668,22454]	[11668,12091]	0	0	0	0	0		[33336,34545]	$
Opłaty za wodę	[242004,252840]	[190146,198660]	0	0	0	0	0		[432150,451500]	$
Inne	[1500,2000]	[1000,1300]	[900,1000]	[1800,2000]	[900,1100]	[500,800]	[1000,1200]		[7600,8100]	$
Całkowite wejście dla sektora	2300000	1500000	[252090, 259430]	[273350, 301600]	[239430, 246370]	[356440, 364670]	[257550, 265960]			

5. PROPOZYCJA ROZWIĄZANIA DLA INTERWAŁOWEGO MODELU WEJŚCIA-WYJŚCIA

Najczęściej spotykane rozwiązania dla interwałowego modelu wejścia-wyjścia bazują na poszukiwaniu pewnych podmodeli, które mają na celu znaleźć wartości osobno dla lewych i prawych granic interwałów opisujących koszt i wielkość produkcji. Rozwiązania takie, nie eliminujące z modelu odwracania macierzy produkcyjnej, mają niewiele wspólnego z zasadami rządzącymi arytmetyką przedziałową. W odróżnieniu od nich proponowane przez nas rozwiązanie w pełni wykorzystuje metodologię interwałową, a ponadto w aspekcie wyznaczania wielkości produkcji w poszczególnych sektorach eliminuje całkowicie konieczność odwracania interwałowej macierzy $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ współczynników wejścia-wyjścia.

Możemy zauważyć, że równanie (10), opisujące wielkość prognozowanej produkcji da się przekształcić do równoważnej postaci:

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{xout}=\boldsymbol{f} \tag{16}$$

Zależność (16) jest niczym więcej niż liniowym interwałowym równaniem macierzowym. Problem rozwiązania modelu wejścia-wyjścia redukuje się więc do problemu znalezienia optymalnego algorytmu rozwiązywania interwałowych układów równań, który oszacuje wartość produkcji ***xout***. Badania prowadzone przez nas nad algorytmem Gaussa z pracy [1] przyniosły nienajlepsze wyniki, obarczone zbyt dużą niepewnością prognozowanych wyników produkcji. Dzieje się tak z powodu bezpośredniego zastosowania arytmetyki interwałowej do algorytmu operującego na liczbach rzeczywistych. Takie działanie nie uwzględnia w żaden sposób różnic właściwości arytmetyki przedziałowej i tradycyjnej.

Poniżej przedstawimy proponowane przez nas rozwiązanie problemu (16). Niech mamy układ n zwykłych równań liniowych w postaci macierzowej **A*****x** = **b**. Stosując rozkładu macierzy **A** na dwie macierze trójkątne otrzymujemy algorytm dwuprzebiegowy, na który składają się postępowanie wprost, polegające na eliminacji do zer elementów, leżących pod diagonalną macierzy **A**, oraz postępowanie odwrotne. Przedziałowy odpowiednik metody Gaussa buduje się poprzez zastosowanie analogicznych etapów przetwarzania macierzy **A** oraz wektorów **x** i **b**, których elementy składowe będą miały postać: $\lfloor a_{ij}\rfloor=[\underline{a_{ij}},\overline{a_{ij}}]$, $[x_i]=[\underline{x_i},\overline{x_i}]$, oraz $[b_i]=[\underline{b_i},\overline{b_i}]$, przy czym i, j = 1, 2, ... , n. W wyniku rekurencyjnych przekształceń, zgodnie z klasycznym algorytmem Gaussa, otrzymujemy następujący algorytm:

a) *Etap postępowania wprost*:

$$\lfloor \underline{m_{ji}},\overline{m_{ji}}\rfloor=\lfloor \underline{a_{ji}},\overline{a_{ji}}\rfloor/\lfloor \underline{a_{ii}},\overline{a_{ii}}\rfloor;\quad \lfloor \underline{a_{jk}},\overline{a_{jk}}\rfloor=\lfloor \underline{a_{jk}},\overline{a_{jk}}\rfloor-\lfloor \underline{m_{ji}},\overline{m_{ji}}\rfloor*\lfloor \underline{a_{ik}},\overline{a_{ik}}\rfloor; \tag{17}$$

$$\lfloor \underline{m_{ji}},\overline{m_{ji}}\rfloor=\lfloor \underline{a_{ji}},\overline{a_{ji}}\rfloor/\lfloor \underline{a_{ii}},\overline{a_{ii}}\rfloor;\quad \lfloor \underline{b_{j}},\overline{b_{j}}\rfloor=\lfloor \underline{b_{j}},\overline{b_{j}}\rfloor-\lfloor \underline{m_{ji}},\overline{m_{ji}}\rfloor*\lfloor \underline{b_{i}},\overline{b_{i}}\rfloor \tag{18}$$

gdzie i = 1, 2, …, n, j = i +1,…; $k = i,...,n$.

b) *Postępowanie odwrotne*:

$$\lfloor \underline{s},\overline{s}\rfloor=\sum_{\substack{i=0,\\ j=i}}^{i=n,\,j=n}\lfloor \underline{a_{ij}},\overline{a_{ij}}\rfloor*\lfloor \underline{x_{j}},\overline{x_{j}}\rfloor; \tag{19}$$

$$\lfloor \underline{x_{i}},\overline{x_{i}}\rfloor=(\lfloor \underline{b_{i}},\overline{b_{i}}\rfloor-\lfloor \underline{s},\overline{s}\rfloor)/\lfloor \underline{a_{ii}},\overline{a_{ii}}\rfloor \tag{20}$$

gdzie: $i = n$, n - 1, …,0; j = n, n - 1, …,i, $[m_{ij}]$, $[s_{ij}]$ – zmienne pomocnicze.

W wyniku otrzymujemy przedziałowy wektor [**x**] = $[[\underline{x_1},\overline{x_1}],[\underline{x_2},\overline{x_2}],...,[\underline{x_n},\overline{x_n}]]$.

Skupiamy się na etapie postępowania odwrotnego. Równanie (20) przewiduje wielokrotnie dzielenie wartości przedziałowej przez przedział. Ponieważ, jak wiadomo, operacja dzielenia powoduje znaczne rozszerzenie przedziału wynikowego, proponujemy następujące rozwiązanie tego problemu. Aby wyeliminować z równania dzielenie należy je przekształcić do równoważnej postaci: $[a]*[x]-[b]=[0]$, gdzie przez zapis [0] rozumiemy przedziałową postać zera. Z zasad arytmetyki przedziałowej [1], wynika, że $[\underline{a},\overline{a}]-[\underline{a},\overline{a}]=[\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a}]$. To znaczy, że odejmowanie od siebie tej samej wartości daje w wyniku symetryczny wokół rzeczywistej liczby zero przedział. Zgodnie z tą widzą możemy zdefiniować [0] jako następujący przedział [0]=[-y, y], gdzie y oznaczać będzie symetryczną odchyłkę wokół zera rzeczywistego. Ostatecznie nasze równanie będzie mieć postać:

$$[\underline{a},\overline{a}]*[\underline{x},\overline{x}]-[\underline{b},\overline{b}]=[-y,y] \tag{21}$$

Otrzymane równanie przedziałowe można zgodnie z zasadami arytmetyki przedziałowej przedstawić jako:

$$[\underline{a}*\underline{x},\overline{a}*\overline{x}]-[\underline{b},\overline{b}]=[-y,y]\ . \tag{22}$$

Powyższe równanie może być z kolei rozpisane na dwa równania dotyczące lewych i prawych granic przedziałów biorących w nim udział:

$$\begin{cases} \underline{a}*\underline{x}-\overline{b}=-y, \\ \overline{a}*\overline{x}-\underline{b}=y. \end{cases} \tag{23}$$

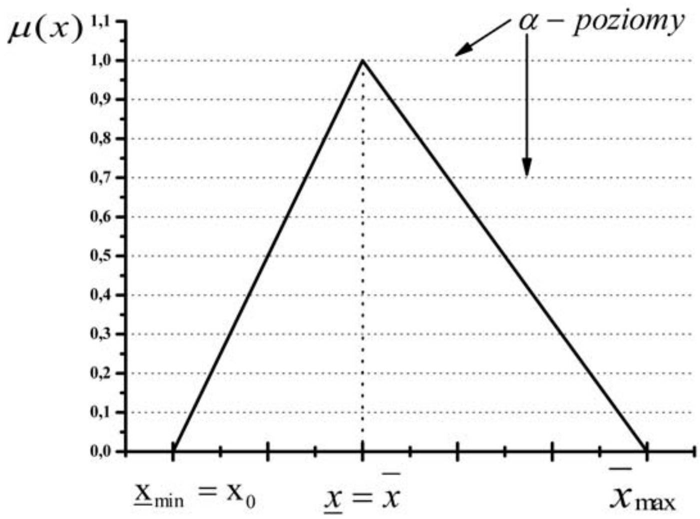
W wyniku tej transformacji otrzymaliśmy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi. Aby uprościć otrzymany układ równań możemy oba równania dodać stronami w wyniku czego otrzymamy jedno równanie liniowe z dwoma niewiadomymi:

$$\underline{a}*\underline{x}-\overline{b}+\overline{a}*\overline{x}-\underline{b}=0\,. \tag{24}$$

Należałoby się teraz zastanowić, w jaki sposób możemy otrzymać rozwiązania szczegółowe i w jakiej one będą postaci? W celu rozwiązania równania (24) musimy dodać pewne ograniczenie. Najbardziej naturalnym w przypadku większości zagadnień fizyki albo ekonomiki wygląda ograniczenie typu $\underline{x}$ >0, czyli przepuszczenie, że wartość pozyskiwanego przez nas parametru może być wyłącznie dodatniej. Gdy przeanalizujemy równanie (24) mając na uwadze ograniczenie typu $\underline{x}$ >0, to dojdziemy do wniosku, że gdy wartość $\underline{x}$ będzie najmniejsza, czyli $\underline{x}$ = 0, to $\overline{x}$ osiągnie wartość maksymalną, z czego wynika, że długość przedziału [$\underline{x}$, $\overline{x}$] będzie największa. Gdy wartość $\underline{x}$ przesuwać będziemy na prawo od zera to w pewnym momencie rozpiętość przedziału [$\underline{x}$, $\overline{x}$] osiągnie wartość 0, gdyż $\overline{x}$ przesuwając się w kierunku początku układu współrzędnych zrówna się wartością z $\underline{x}$. Oczywiście, że w praktyce $\underline{x}$ nie obowiązkowo powinno być równym zero. To znaczy, że w ogóle $\underline{x} = x_0$, gdzie x_0 – ograniczenie, wynikające z sensu rozwiązywanego problemu. Na pierwszy rzut oka wprowadzenie takiego rodzaju ograniczeń w algebrze liniowej (co prawda, przedziałowej) wygląda dość niezwykłe. Jednak wystarczy wspomnieć, że w zagadnieniach programowania liniowego ograniczenia są już niezbędnym elementem zagadnienia. Wprowadzając ograniczenia w naszej sytuacji faktycznie nie zmniejszamy dokładności otrzymanego rozwiązania, ponieważ w realnych zagadnieniach możliwe granicy poszukiwanego rozwiązania z reguły są wiadome.

Rozpatrywane przypadki podsuwają rozwiązanie postaci, jaką przyjmie w naszej metodzie wynik dzielenia dwóch przedziałów. W wyniku otrzymamy nie przedział, lecz liczbę rozmytą (ang. fuzzy number) w postaci trójkątnej $\tilde{x}=[l, m, u]$, gdzie l, m, u oznaczają charakterystyczne dla trójkątnej liczby rozmytej parametry: l-lewa granica, u-prawa granica, m - środek przedziału.

Rozważmy procedurę otrzymania rozmytego wyniku, gdy przyjmujemy $\underline{x} = x_0$, gdzie x_0 – minimalna możliwa wartość dolnej granicy. Wtedy z równania (24) otrzymamy maksymalną wartość $\overline{x}$ i z kolei maksymalną szerokość przedziału $w([x]) = \overline{x} - \underline{x} = w_{max.}$ Gdy przesuniemy $\underline{x}$ na prawo, otrzymamy mniejsze $\overline{x}$ i mniejszą szerokość przedziałowego rozwiązana w. Oczywiście względną szerokość przedziału w/ w_{max} możemy traktować jak naturalny względny stopień niepewności przedziałowego rozwiązana. Jeżeli skojarzyć stopień niepewności w/ w_{max} z α- poziomem liczby rozmytej, możemy przedstawić ciągły zbiór możliwych przedziałowych rozwiązań (równanie (24)) w formie liczby rozmytej, przedstawionej na rys. 1.



Rys. 1. Rozmyty wynik równania interwałowego

Podsumowując możemy stwierdzić, że zaproponowana przez nas metoda rozwiązywania interwałowego modelu wejścia-wyjścia daje w wyniku rozmyto-interwałowe wartości prognozowanej produkcji. Analizując takie wyniki jesteśmy w stanie określić najbardziej prawdopodobny poziom produkcji odpowiadający α-poziomowi α=1.0, oraz prawdopodobną maksymalną wartość produkcji.

Wyznaczenie wartości kosztów działalności poszczególnych sektorów wymaga znalezienia wartości macierzy ***U*** i ***V*** w równaniach (11) i (12), w których dla przykładu z tabeli 4. ***ER*** i ***T*** mają następującą postać

$$ER = \begin{bmatrix} [0.0095,0.0096] & [0.0066,0.0067] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0095,0.0096] & [0.0072,0.0073] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0036,0.0037] & [0.0126,0.0127] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0019,0.0020] & [0.0022,0.0023] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0056,0.0057] & [0.0109,0.0113] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0012,0.0013] & [0.0046,0.0047] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0156,0.0157] & [0.0099,0.0100] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0014,0.0015] & [0.0011,0.0012] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0017,0.0020] & [0.0016,0.0017] & 0 & 0 & 0 & 0 & [0.0038,0.0047] \\ [0.2391,0.2435] & [0.2133,0.2267] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0.0046,0.0056] & [0.008,0.0011] & 0 & [0.0038,0.0042] & [0.0024,0.0031] \\ [0.0001,0.0001] & [0.0001,0.0001] & [0.0008,0.0010] & 0 & [0.0013,0.0015] & [0.0007,0.0008] & [0.0005,0.0006] \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} [0.0024,0.0025] & [0.0024,0.0025] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0026,0.0027] & [0.0026,0.0027] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0013,0.0014] & [0.0012,0.0013] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0019,0.0020] & [0.0018,0.0019] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0.9444,0.9917] & [0.7460,0.8414] & [0.9538,1.0024] & [0.9461,0.9819] & [0.9212,0.9707] \\ [0.2522,0.3130] & [0.2933,0.3133] & [0.0096,0.0107] & [0.0033,0.0044] & [0.0037,0.0042] & [0.0063,0.0070] & [0.0301,0.0330] \\ [0.0023,0.0024] & [0.0030,0.0031] & [0.0002,0.0003] & 0 & [0.0004,0.0005] & [0.0001,0.0002] & [0.0017,0.0019] \\ [0.0004,0.0013] & [0.0007,0.0017] & [0.0000,0.0060] & [0.0000,0.0059] & [0.0000,0.0054] & [0.0000,0.0042] & [0.0000,0.0078] \\ [0.0011,0.0013] & [0.0015,0.0019] & 0 & [0.1326,0.2195] & 0 & [0.0096,0.0112] & 0 \\ 0 & 0 & [0.0050,0.0060] & [0.0133,0.0183] & [0.0032,0.0042] & [0.0069,0.0084] & [0.0023,0.0031] \\ [0.0015,0.0017] & [0.0023,0.0024] & [0.0035,0.0040] & [0.0043,0.0055] & [0.0057,0.0063] & [0.0025,0.0028] & [0.0026,0.0031] \\ [0.3709,0.3870] & [0.4007,0.4267] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.1930,0.2359] & [0.2325,0.2842] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0094,0.0098] & [0.0078,0.0081] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.1052,0.1099] & [0.1268,0.1324] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0007,0.0009] & [0.0007,0.0009] & [0.0035,0.0040] & [0.0060,0.0073] & [0.0037,0.0046] & [0.0014,0.0022] & [0.0038,0.0047] \end{bmatrix}$$

Wydaje się, że największym problemem stanie się niemożliwość wyeliminowania odwracania macierzy $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$, gdzie $\boldsymbol{A}$, dla przykładu z tabeli 4 ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0686,0.0706] & [0.0625,0.0646] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0744,0.0825] & [0.0681,0.0751] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0652,0.0671] & [0.0597,0.0614] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0971,0.0993] & [0.0888,0.0909] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0.0701,0.0724] & [0.0642,0.0663] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminacja tego problemu zostanie przedstawiona w innych pracach, mających na celu zastosowanie modelu Leontiefa do rozwiązywania problemów ekonomicznych i gospodarczych.

6. WNIOSKI

W niniejszej pracy przedstawiliśmy jedno z kluczowych zagadnień wspomagania podejmowania optymalizowanych decyzji ekonomicznych w różnorodnych sektorach gospodarczych. Zaproponowane przez nas rozwiązanie interwałowej analizy wejścia-wyjścia pozwala na wyeliminowanie kłopotliwego etapu odwracania macierzy interwałowej poprzez zastosowania sformułowanego przez nas zmodyfikowanego algorytmu rozwiązywania układów równań interwałowych, a ponadto umożliwia uzyskanie rozmytego opisu prognozowanej wielkości produkcji w sektorach w przypadku, gdy tabela wejścia-wyjścia zawiera co najwyżej dane w postaci interwałowej. W następnej pracy przedstawione zostanie podejścia pozwalające na eliminację z równań (11) i (12) problemu odwracania macierzy interwałowych.

LITETRATURA

[1] Moore R.E., Interval analysis, Englewood Cliffs. N.J., Prentice-Hall 1966.
[2] Markov S.M., A non-standard subtraction of intervals, Serdica 1977, 3, 359-370.
[3] Hansen E., A generalized interval arithmetic. Interval Mathematics/ Ed. by K.Nicke, Lecture Notes in Computer Science, 29, Berlin - Heidelberg: Springer-Verl. 1975, 7-18.
[4] Sendov B., Some topics of segment analysis, Interval Mathematics, 1980/ Ed. by K.Nickel. N.Y.e.a.: Academic Press 1980, p. 203-222.
[5] Leontief, W. W. (1985). The Choice of Technology, Scientific American, pp. 37-45.
[6] Leontief, W. W. (1949).The Structure of the American Economy, 1919-1935, Oxford University Press, London & New York.
[7] Leontief, W. W. and Daniel, F. (1972). "Air Pollution and the Economic Structure: Empirical Results of Input-Output Computations." Input-Output Techniques. Brody, A. and Carter, A. P. editors. North-Holland Publishing Company.
[8] W. Leontief, Quantitative input-output relations in the economic system of the United States, Review of Economics and Statistics 18 (1936) 100-125.
[9] W. Leontief, Studies in the Structure of the American Economy, Oxford University Press, New York, 1953. [3] W. Leontief, The dynamic inverse, in: A.P. Carter, A. Brody (Eds.), Contribution to Input-Output Analysis, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 17-46.

[10] D.G. Luenberger, A. Arbel, Singular dynamic Leontief systems, Econometrica 45 (1977) 991-995. [5] D.B. Szyld, Condition for the existence of a balanced growth solution for the Leontief dynamic input-output model, Econometrica 53 (1985) p. 1411-1419.
[11] D. Campisi, A. La Bella, Transportation supply and economic growth in a multi-regional system, Environment and Planning (A) 20 (1988) 925-936.
[12] C.A. Pasurka, The short-run impact of environmental pollution costs to US product prices, Journal of Environmental Economics and Management 11 (1984) 380-398.
[13] J.J. Rhee, J.A. Miranowski, Determination of income, production and employment under pollution control: An input-output approach, Review of Economics and Statistics 66 (1) (1984) 146-150.
[14] R.E. Moore, Method and Application of Interval Analysis, SIAM, Philadelphia, USA, 1979.
[15] C.C. Wu, N.B. Chang, Grey input-output analysis and its application for environmental cost allocation, European Journal of Operational Research 145 (2003), p. 175-201
[16] F.E. Briggs, On problems of estimation in Leontief models, Econometrica 25 (1975) 411 155.
[17] G.R. West, A stochastic analysis of an input-output model, Econometrica 54 (1986) 363-374.
[18] C.W. Bullard, A.V. Sebaled, Monte Carlo sensitivity analysis of input-output models, The Review of Economics and Statistics 70 (4) (1988) 708-712.