

Mariusz GONERA, Ludmiła DYMOWA
Politechnika Częstochowska
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej
ul. Dąbrowskiego, 73, 42-200 Częstochowa
Adres e-mail: mariusz_gonera@o2.pl

Metoda rozwiązywania układów równań liniowych z parametrami interwałowymi i przykłady jej zastosowań

Streszczenie

Szeroki wachlarz dziedzin nauki i gospodarki wymaga rozwiązywania coraz to bardziej skomplikowanych problemów. Większość z nich można jednak sprowadzić do prostej postaci równań bądź układów równań. Ze względu na charakter rzeczywistych danych, obarczonych różnorodną niepewnością, parametry oraz zmienne takich równań mogą posiadać postać interwałową lub rozmytą. Metody rozwiązywania interwałowych układów równań są przedmiotem badań wielu naukowców. Jednakże przykłady ich realizacji obarczone są różnorodnymi wadami, wynikającymi przede wszystkim z tego, że ich twórcy przechodzą zbyt bezpośrednio od wersji dla liczb rzeczywistych do wersji dla liczb interwałowych czy rozmytych, nie bacząc na znaczące różnice we własnościach arytmetyki rzeczywistej i interwałowej (a tym bardziej rozmytej). W niniejszej pracy proponujemy własną propozycję metody rozwiązywania interwałowych układów równań, która bazuje na klasycznym algorytmie Gaussa. Pozbawiona jest wad związanych z wielokrotnym dzieleniem interwałowym występującym w tzw. „postępowaniu odwrotnym”. Ciekawą cechą naszego podejścia jest możliwość uzyskania rozmyto-interwałowych pierwiastków równań interwałowych. Aby pokazać, jakie zalety posiada nasza metoda, zostanie ona wykorzystana w kilku przykładach dotyczących zagadnień podejmowania optymalizowanych decyzji ekonomicznych. Pierwszy przykład dotyczyć będzie wykorzystania naszego podejścia do algorytmu wyliczania tzw. współczynników względnej ważności, drugi przykład zobrazuje, w jaki sposób nasza metoda może być wykorzystana do ulepszenia funkcjonowania interwałowej analizy i modelu wejścia-wyjścia (sformułowanych przez laureata nagrody Nobla W. Leontiewa), będącej narzędziem do prognozowania kosztów działalności

przedsiębiorstw i wielkości produkcji. Otrzymane wyniki są porównywane z wynikami najbardziej znanych metod w danej dziedzinie.

Słowa kluczowe: Liczba Interwałowa, Zmodyfikowana Metoda Gaussa, Podejmowanie Decyzji Ekonomicznych, Analiza wejścia-wyjścia, Interwałowa Macierz Parzystych Porównań, IOA (Input-Output Analysis)

1. Wprowadzenie.

Współczesne problemy z jakimi borykają się różne instytucje, w szczególności przedsiębiorstwa produkcyjno-usługowe, związane są z takim planowaniem działalności aby przy minimalnych kosztach własnych wyprodukować jak najwięcej i jak najwięcej zyskać przy sprzedaży wytworzonych dóbr. Tak sformułowany problem nazwać możemy problemem podejmowania decyzji w warunkach zmienności szeroko rozumianej niepewności, wyrażającej się chociażby tym, że np. produkcja silników samochodowych zależna jest od terminowości wytworzenia łożków, a nie jesteśmy w stanie ze 100% pewnością powiedzieć czy podwykonawca wytworzy je na czas, a nawet jeżeli tak, to czy będą spełniać założone normy jakościowe.

Znaczna część tego typu problemów sprowadza się do rozwiązywania równań bądź układów równań algebraicznych. Można dość jednoznacznie stwierdzić, że problemy ich rozwiązywania w przypadku opisu parametrów przez liczby rzeczywiste są w zasadzie rozwiązane. Jednak w rzeczywistości parametry tych układów równań są często wiadome z dokładnością do przedziałów. Na przykład, dobre tablice właściwości materiałowych podają z reguły dane w formie $m \pm \sigma$, gdzie σ charakteryzuje szerokość przedziałów zmienności zadanego parametru, zaś m opisuje oczekiwaną wartość tego parametru. Nie będziemy tutaj zagłębiać się w filozofię niepewności danych wejściowych (zwykle jest związana z niedokładnością pomiarów, prognoz, wpływu zewnętrznego otoczenia itp.). Problem rozwiązywania równań przedziałowych jest jednym z ważniejszych zagadnień arytmetyki przedziałowej [1]. Chociaż formalnie rozszerzenie przedziałowe systemów zwykłych, z punktu widzenia algebraicznego, wydaje się banalnym, konkretne realizacje, na przykład, rozmyto-przedziałowej odmiany procedury Gaussa doprowadzą do znacznego rozszerzenia wynikowych przedziałów. Odnotowana cecha to jest wewnętrzny problem arytmetyki przedziałowej, w związku z czym powstało

kilka jej modyfikacji. Najbardziej znanymi spośród nich są: arytmetyka przedziałowa z niestandardowym odejmowaniem i dzieleniem [2], uogólniona arytmetyka przedziałowa [3], matematyka segmentowa [4], forma scentrowana [1], MV-forma [5]. Wszystkie te sposoby są efektywne w odniesieniu do określonych klas sytuacji. Przyczyną ich powstania jest właśnie dążenie do skonstruowania matematyki przedziałowej, pozwalającej otrzymywać wyniki w formie dosyć wąskich przedziałów. Wzrost szerokości przedziałów wynikowych całkowicie odzwierciedla rzeczywistość i w istocie odpowiada zasadzie wzrastania nieoznaczoności (entropii) jednak jest on zjawiskiem niepożądanym.

Obok opisanego powyżej problemu istnieje drugi problem, związany z istnieniem zera przedziałowego. Dla przykładu, gdy mamy bazowe rzeczywiste równanie $f(x) = 0$. Jego naturalne rozszerzenie przedziałowe [1] może być przedstawione jako zastąpienie zwykłych zmiennych przez zmienne przedziałowe i wszystkich operacji arytmetycznych przez odpowiednie operacje przedziałowe. W wyniku otrzymujemy równania przedziałowe w formie: $[f]([x]) = 0$. Po niewielkiej analizie tak sformułowanego równania możemy stwierdzić, że nie ma ono sensu, ponieważ jego lewa część przedstawia wartość przedziałową, a prawa nieprzedziałowe zdegenerowane zero. Oczywiście, jeżeli $[f]([x]) = [\underline{f}, \bar{f}]$, to wtedy wydaje się, że równanie $[f]([x]) = 0$ jest prawdziwe tylko, jeśli $\underline{f} = \bar{f} = 0$. Nawet w takim przypadku równanie nie jest w pełni spełnione, ponieważ jego rozwiązaniem będzie interwał, którego lewa granica będzie większa od prawej – jest to sytuacja niedopuszczalna.

W niniejszej pracy przedstawimy propozycję metody rozwiązywania interwałowych układów równań eliminującej opisywane powyżej problemy, bazującej na klasycznej metodzie eliminacji Gaussa. Ponadto aby zademonstrować zalety wprowadzonej metody zaprezentujemy kilka jej zastosowań związanych z interwałowymi i rozmyto - interwałowymi metodami wspomagającymi podejmowanie decyzji, których sformułowanie wymaga istnienia sprawnego mechanizmu rozwiązywania interwałowych równań i układów równań, pozbawionego problemów opisanych wcześniej.

Na początku przedstawiona zostanie sformułowana przez nas metoda rozwiązywania przedziałowych układów równań, pozbawiona problemów związanych z operacją dzielenia interwałowego i problemów związanych z istnieniem zera interwałowego, bazująca na klasycznej interwałowej metodzie Gaussa [1]. Metoda ta zostanie następnie wykorzystana w zagadnieniu wyznaczania współczynników względnej ważności na podstawie danych zawartych w interwałowej macierzy parzystych porównań, w celu zobrazowania

jej zalet. Drugim przykładem zastosowań zaproponowanej metody będzie interwałowa analiza wejścia-wyjścia, sformułowana przez laureata nagrody Nobla W. Leontiewa [7-11]. Wspomniana analiza i skojarzony z nią model służą do prognozowania wielkości produkcji i wartości kosztów działalności w różnorodnych systemach gospodarczych, podzielonych na tzw. sektory gospodarcze.

Pozostała część niniejszej pracy zorganizowana została w następujący sposób. W sekcji 2 opisane są ogólne metodologiczne zasady proponowanej metody rozwiązywania przedziałowych układów równań pozbawionej problemów związanych z operacją dzielenia interwałowego i problemów związanych z istnieniem zera interwałowego. W sekcji 3 przedstawione zostaną podstawy metody wyznaczania interwałowych współczynników względnej ważności z wykorzystaniem metody z sekcji 2. Metoda ta zostanie zilustrowana przykładem zawartym w pracy [6] mającym na celu pokazać zalety połączenia proponowanych przez nas metod z sekcji 2 i 3 w porównaniu z metodami sformułowanymi w pracach [19], [20] i [23]. W sekcji 4 zawarty jest krótki opis analizy wejścia-wyjścia i sposób jej modyfikacji z udziałem metody z rozdziału 2. Modyfikacja ta umożliwi wyeliminowanie z IOA (input-output analysis) etapu odwracania głównej macierzy współczynników technologicznych, który to etap w znaczący sposób wpływa na kumulację błędów, a tym samym na niedokładność prognoz. W sekcji 5 zawarte zostanie krótkie podsumowanie i prezentacja głównych wniosków.

W sekcji 2 przedstawiona zostanie możliwość uzyskania rozmyto – interwałowych wyników w sytuacji, gdy dane wejściowe mają formę przedziałową.

2. Metoda rozwiązywania interwałowych układów równań.

Rozmyto-interwałowe pierwiastki równań interwałowych.

Założmy na początku, że liczby przedziałowe $[x]$ oraz $[y]$ opiszemy za pomocą przedziałów wartości odpowiednio $[\underline{x}, \bar{x}]$, oraz $[\underline{y}, \bar{y}]$. Bazowe operacje przedziałowe zaczerpnięte zostały z prac [1], [13] i [16].

Poniżej przedstawimy proponowaną przez nas metodę rozwiązania równań liniowych, która w znaczącym stopniu eliminuje problemy związane z arytmetyką przedziałową opisane powyżej. Niech mamy układ n zwykłych równań liniowych w postaci macierzowej $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Stosując rozkład macierzy \mathbf{A} na dwie macierze trójkątne, otrzymujemy algorytm dwuprzebiegowy, na który

składają się postępowanie wprost, polegające na eliminacji do zer elementów, leżących pod diagonalą macierzy \mathbf{A} , oraz postępowanie odwrotne. Przedziałowy odpowiednik metody Gaussa buduje się poprzez zastosowanie analogicznych etapów przetwarzania macierzy \mathbf{A} oraz wektorów \mathbf{x} i \mathbf{b} , których elementy składowe będą miały postać: $[a_{ij}] = [a_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $[x_i] = [x_i, \bar{x}_i]$, oraz $[b_i] = [b_i, \bar{b}_i]$, przy czym $i, j = 1, 2, \dots, n$. W wyniku rekurencyjnych przekształceń, zgodnie z klasycznym algorytmem Gaussa, otrzymujemy następujący algorytm:

a) *Etap postępowania wprost:*

$$[m_{ji}, \bar{m}_{ji}] = [a_{ji}, \bar{a}_{ji}] / [a_{ii}, \bar{a}_{ii}]; \quad [a_{jk}, \bar{a}_{jk}] = [a_{jk}, \bar{a}_{jk}] - [m_{ji}, \bar{m}_{ji}] * [a_{ik}, \bar{a}_{ik}]; \quad (1)$$

$$[m_{ji}, \bar{m}_{ji}] = [a_{ji}, \bar{a}_{ji}] / [a_{ii}, \bar{a}_{ii}]; \quad [b_j, \bar{b}_j] = [b_j, \bar{b}_j] - [m_{ji}, \bar{m}_{ji}] * [b_i, \bar{b}_i] \quad (2)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n, j = i+1, \dots; k = i, \dots, n$.

b) *Postępowanie odwrotne:*

$$[s, \bar{s}] = \sum_{j=i}^{i=n, j=p} [a_{ij}, \bar{a}_{ij}] * [x_j, \bar{x}_j] \quad (3)$$

$$[x_i, \bar{x}_i] = ([b_i, \bar{b}_i] - [s, \bar{s}]) / [a_{ii}, \bar{a}_{ii}] \quad (4)$$

gdzie: $i = n, n-1, \dots, 0; j = n, n-1, \dots, i, [m_{ij}], [s_{ij}]$ – zmienne pomocnicze.

W wyniku otrzymujemy przedziałowy wektor $[x] = [[x_1, \bar{x}_1], [x_2, \bar{x}_2], \dots, [x_n, \bar{x}_n]]$.

Skupiamy się na etapie postępowania odwrotnego. Równanie (4) przewiduje wielokrotnie dzielenie wartości przedziałowej przez przedział. Ponieważ, jak wiadomo, operacja dzielenia powoduje znaczne rozszerzenie przedziału wynikowego, proponujemy następujące rozwiązanie tego problemu. Aby wyeliminować z równania dzielenie, należy je przekształcić do równoważnej postaci: $[a] * [x] - [b] = [0]$, gdzie przez zapis $[0]$ rozumiemy przedziałową postać zera. Z zasad arytmetyki przedziałowej [1], wynika, że $[a, \bar{a}] - [a, \bar{a}] = [a - \bar{a}, \bar{a} - a]$. To znaczy, że odejmowanie od siebie tej samej wartości daje w wyniku symetryczny wokół rzeczywistej liczby zero przedział. Zgodnie z tą widzą możemy zdefiniować $[0]$ jako przedział $[0] = [-y, y]$, gdzie y oznaczać będzie symetryczną odchyłkę wokół zera rzeczywistego. Ostatecznie nasze równanie będzie mieć postać:

$$[\underline{a}, \bar{a}] * [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [-y, y] \quad (5)$$

Otrzymane równanie przedziałowe można zgodnie z zasadami arytmetyki przedziałowej przedstawić jako:

$$[\underline{a} * \underline{x}, \bar{a} * \bar{x}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [-y, y] . \quad (6)$$

Powyższe równanie może być z kolei rozpisane na dwa równania, dotyczące lewych i prawych granic przedziałów biorących w nim udział:

$$\begin{cases} \underline{a} * \underline{x} - \bar{b} = -y, \\ \bar{a} * \bar{x} - \underline{b} = y. \end{cases} \quad (7)$$

W wyniku tej transformacji otrzymaliśmy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi. Aby uprościć otrzymany układ równań, możemy oba równania dodać stronami w wyniku czego otrzymamy jedno równanie liniowe z dwoma niewiadomymi:

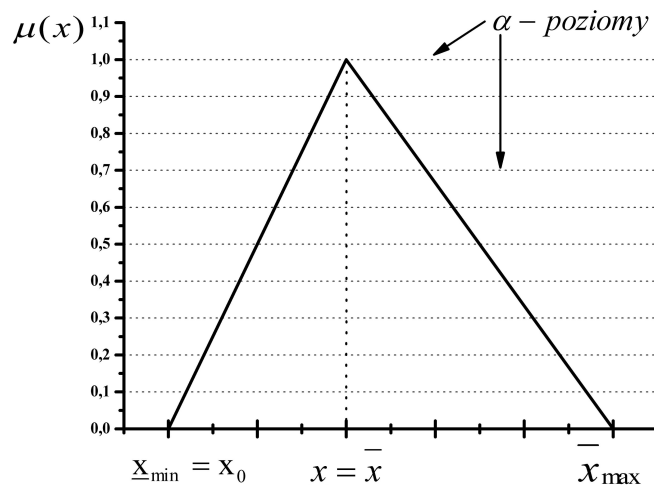
$$\underline{a} * \underline{x} - \bar{b} + \bar{a} * \bar{x} - \underline{b} = 0. \quad (8)$$

Należałoby się teraz zastanowić, w jaki sposób możemy otrzymać rozwiązania szczegółowe i w jakiej one będą postaci? W celu rozwiązania równania (8) musimy dodać pewne ograniczenie. Najbardziej naturalnym w przypadku większości zagadnień fizyki albo ekonomiki wygląda ograniczenie typu $\underline{x} > 0$, czyli przepuszczenie, że wartość pozyskiwanego przez nas parametru może być wyłącznie dodatniej. Gdy przeanalizujemy równanie (8), mając na uwadze ograniczenie typu $\underline{x} > 0$, to dojdziemy do wniosku, że gdy wartość \underline{x} będzie najmniejsza, czyli $\underline{x} = 0$, to \bar{x} osiągnie wartość maksymalną, z czego wynika, że długość przedziału $[\underline{x}, \bar{x}]$ będzie największa. Gdy wartość \underline{x} przesuwając będziemy na prawo od zera, to w pewnym momencie rozpiętość przedziału $[\underline{x}, \bar{x}]$ osiągnie wartość 0, gdyż \bar{x} przesuwał się w kierunku początku układu współrzędnych zrówna się wartością z \underline{x} . Oczywiście, że w praktyce dolna granica \underline{x} nie obowiązkowo powinna być równa zero. To znaczy, że w ogóle $\underline{x} = x_0$, gdzie x_0 – ograniczenie, wynikające z sensu rozwiązywanego problemu. Na pierwszy rzut oka wprowadzenie takiego rodzaju ograniczeń w algebrze liniowej (co prawda, przedziałowej) wygląda dość niezwykle. Jednak wystarczy

wspomnieć, że w zagadnieniach programowania liniowego ograniczenia są już niezbędnym elementem zagadnienia. Wprowadzając ograniczenia w naszej sytuacji faktycznie nie zmniejszamy dokładności otrzymanego rozwiązania, ponieważ w realnych zagadnieniach możliwe granice poszukiwanego rozwiązania z reguły są wiadome.

Rozpatrywane przypadki podsuwają rozwiązanie postaci, jaką przyjmie w naszej metodzie wynik dzielenia dwóch przedziałów. W wyniku otrzymamy nie przedział, lecz liczbę rozmytą (ang. fuzzy number) w postaci trójkątnej $\tilde{x} = [l, m, u]$, gdzie l, m, u oznaczają charakterystyczne dla trójkątnej liczby rozmytej parametry: l -lewa granica, u -prawa granica, m - środek przedziału.

Rozważmy procedurę otrzymania rozmytego wyniku, gdy przyjmujemy $\underline{x} = x_0$, gdzie x_0 – minimalna możliwa wartość dolnej granicy. Wtedy z równania (8) otrzymamy maksymalną wartość \bar{x} i z kolei maksymalną szerokość przedziału $w([\underline{x}]) = \bar{x} - \underline{x} = w_{max}$. Gdy przesuniemy \underline{x} na prawo, otrzymamy mniejsze \bar{x} i mniejszą szerokość przedziałowego rozwiązania w . Oczywiście względną szerokość przedziału w/w_{max} możemy traktować jak naturalny względny stopień niepewności przedziałowego rozwiązania. Jeżeli skojarzyć stopień niepewności w/w_{max} z α -poziomem liczby rozmytej, możemy przedstawić ciągły zbiór możliwych przedziałowych rozwiązań (równanie (8)) w formie liczby rozmytej, przedstawionej na rys. 1.



Rysunek 1. Rozmyty wynik równania interwałowego

Końcowe rozmyto-interwałowe rozwiązania równania interwałowego może zostać przedstawione jako:

$$\tilde{x} = \left[x_0, \frac{(b + \bar{b})}{(a + \bar{a})}, \frac{(b + \bar{b})}{\bar{a}} \right]_{LR} \quad (9)$$

Poniżej przedstawione zostaną dwa przykłady zastosowań opisanej metody, dotyczące wspomagania podejmowania różnorodnych decyzji ekonomicznych.

3. Metoda wyznaczania współczynników względnej ważności z wykorzystaniem interwałowej macierzy parzystych porównań.

Pierwszym przykładem zastosowania powyższej metody będzie podejście, należące do klasy metod wspomagających podejmowanie optymalizowanych decyzji w oparciu o oceny pewnych lokalnych kryteriów (np. IRR, NPV itd.), dokonywanych przez ekspertów. Stanowi ono interwałowe rozszerzenie podejścia, bazującego na liczbach rzeczywistych, zaprezentowanego przez A. Chu, R. Kalaba'ę [22], w oparciu o teorię Saaty'ego [18],[21] z wykorzystaniem metody rozwiązywania zadań minimalizacji funkcji wielu zmiennych $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ przy istnieniu ograniczeń, zadanych w formie równości $g_i(x) = 0, i=1, \dots, k$, zwanej metodą nieokreślonych czynników Lagrange'a. Podjęliśmy pracę nad interwałowym rozszerzeniem właśnie tego podejścia przede wszystkim dlatego, że umożliwia ono wykorzystanie sformułowanej przez nas w sekcji 2 metody rozwiązywania interwałowych układów równań algebraicznych (interwałowe współczynniki względnej ważności spełniają warunek, że lewa granica ich wartości musi być większa lub równa 0, co stanowi naturalne ograniczenie zgodne z założeniami metody z sekcji 2), oraz dlatego, że pozbawione jest ono znaczących wad innych metod tego typu. Wyniki działania zaproponowanej metody zostaną porównane z wynikami uzyskanymi za pomocą trzech innych najbardziej znanych metod: rozmytej logarytmicznej metody najmniejszych kwadratów (The Fuzzy LogarithmicLeast squareMethod (FLLSM)), sformułowanej przez van Laarhoven'a i Pedrycz'a [20], rozmytej metody średniej geometrycznej wartości w wierszach (Fuzzy Geometric Row Means Method (FGRM)), sformułowanej przez Buckley'a [19] i Lootsma'ę [24] oraz metody C.G.E. Boender'a [23].

Znacząca część zagadnień, związanych z procesem podejmowania decyzji w oparciu o dane wejściowe pozyskane od jednego bądź wielu ekspertów w danej dziedzinie, związana jest silnie z potrzebą wyznaczenia zbioru pewnych współczynników $\{w_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, zwanych współczynnikami względnej ważności lub rangami. Rangi te zawierają w sobie informację o stopniu ważności poszczególnych lokalnych kryteriów, zdefiniowanych przez ekspertów lub przez osoby współpracujące z nimi. W przypadku, gdy mamy do czynienia z niewielką ilością kryteriów lokalnych w danym zagadnieniu, można na podstawie doświadczenia w danej dziedzinie wyznaczyć współczynniki względnej ważności każdego z nich. Jednak w przypadku gdy jest ich dużo, łatwiej jest zastosować ich porównywanie parami z wykorzystaniem tzw. macierzy parzystych porównań. Jej budowę i właściwości przedstawimy poniżej. Aby uwzględnić niezdecydowanie ekspertów co do liczbowej oceny kryteriów, które pierwotnie zostały zdefiniowane w sposób lingwistyczny (dla łatwości kontaktu z człowiekiem), wykorzystamy liczby przedziałowe, z których ideą i formalną teorią można zapoznać się w pracach [1-5],[16].

Zakładając, że dla naszych potrzeb będziemy oznaczać interwałową macierz parzystych porównań jako $\mathbf{M} = (a_{ij})_{n \times n}$, możemy wprowadzić oznaczenie liczby $[a_{ij}]$ będącej interwałem $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, jako elementu składowego macierzy \mathbf{M} , oznaczającym wartości porównań parami odpowiednich kryteriów. Wartość liczby $[a_{ij}]$ wyznaczana jest z wykorzystaniem zbioru ocen lingwistycznych zawartych w tabeli 1 w następujący sposób: lewą granicę interwału $[a_{ij}]$ stanowi wartość, odpowiadająca ocenie lingwistycznej wskazującej bliskość znaczeniową dwu porównywanych kryteriów (np. ekspert uważa, że pierwsze kryterium jest niewiele ważniejsze niż drugie, są prawie takie same – 3), zaś prawą granicę tego interwału stanowi ocena eksperta mówiąca o przewadze znaczenia jednego kryterium nad drugim (np. ekspert uważa, że pierwsze kryterium jest ważniejsze niż drugie – 5). W taki sposób buduje się przedział zawierający w sobie informację o niejednoznacznej ocenie eksperta (ekspertów), dotyczącej oceny ważności dwu porównywanych kryteriów – dla naszego przykładu będzie on miał postać [3, 5].

TABELA 1. Lingwistyczne oceny porównań kryteriów parami

Ocena lingwistyczna	Liczba odpowiadająca ocenie
Dwa kryteria są identyczne	1
Pierwsze jest niewiele ważniejsze niż drugie, są prawie takie same	3
Pierwsze jest ważniejsze niż drugie	5
Pierwsze jest sporo ważniejsze niż drugie	7
Pierwsze jest znacznie ważniejsze niż drugie	9

Nie zamieszczone tu wartości liczbowe (2, 4, 6, 8) oznaczają oceny pośrednie.

Tabela 1 zawiera w sobie jedynie 9 ocen lingwistycznych, dotyczących porównań dwu kryteriów. Wydawać by się mogło, że zwiększenie skali ocen (uszczegółowienie) powinno wpłynąć na dokładność współczynników względnej ważności. Tak jednak nie jest. Powyższa skala ocen zbudowana została nie dla dokładnych maszyn, lecz dla ludzi, tak więc zbyt duża ilość ocen zatańczyłaby zupełne różnice pomiędzy porównywanymi kryteriami, prowadząc do gorszych wyników. Zastosowana do budowy tej skali psychologiczna zasada „ 7 ± 2 ” elementów jest zgodna z teorią mówiącą, że większa liczba parametrów opisujących dane zjawisko generuje lawinowo większą liczbę błędów. W tym przypadku zwiększanie parametrów może doprowadzić do sytuacji, w której błąd przewyższy wartość oczekiwaną!

Zgodnie z teorią zawartą w pracy [17], interwałową macierzą parzystych porównań $M = (a_{ij})_{n \times n}$, gdzie n - ilość kryteriów lokalnych podlegających ocenie, $i, j = 1, 2, \dots, n$, nazywamy macierz kwadratową, która spełnia następujące warunki:

- na diagonalu (głównej przekątnej) posiada liczby interwałowe mające wartości 1
- każdy element tej macierzy spełnia warunek:

$$[a_{i,j}] = \frac{1}{[a_{j,i}]} \quad (10)$$

Tak więc zgodnie z powyższą definicją, interwałową macierz parzystych porównań budujemy w następujący sposób:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1N}, \overline{a}_{1N}] \\ [\frac{1}{\underline{a}_{12}}, \frac{1}{\overline{a}_{12}}] & 1 & \dots & [\underline{a}_{2N}, \overline{a}_{2N}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\frac{1}{\underline{a}_{1N}}, \frac{1}{\overline{a}_{1N}}] & [\frac{1}{\underline{a}_{2N}}, \frac{1}{\overline{a}_{2N}}] & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ze względu na skomplikowany proces formułowania właściwej metody wyznaczania interwałowych współczynników względnej ważności, ograniczymy się jedynie do przedstawienia końcowego układu równań rozszerzonego już do postaci interwałowej. Z całością metody dla liczb rzeczywistych, na której bazujemy, można się zapoznać w pracy A. Chu, R. Kalaba, R. Springarn [22]. Ostatecznie końcowy interwałowy układ równań ma postać: (12)

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{21}^2 + a_{31}^2 + \dots + a_{n1}^2 + (n-1))w_1 - (a_{21} + a_{12})w_2 + \\ - (a_{31} + a_{13})w_3 - \dots - (a_{n1} + a_{1n})w_n + \lambda = 0 \\ \\ - (a_{12} + a_{21})w_1 + (a_{12}^2 + a_{32}^2 + \dots + a_{n2}^2 + (n-1))w_2 + \\ - (a_{32} + a_{23})w_3 - \dots - (a_{n2} + a_{2n})w_n + \lambda = 0 \\ \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \\ - (a_{1n} + a_{n1})w_1 - (a_{2n} + a_{n2})w_2 - \dots + \\ - (a_{(n-1)n} + a_{n(n-1)})w_{(n-1)} + (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{(n-1)n}^2 + \\ (n-1))w_n + \lambda = 0 \\ \\ w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = n \end{array} \right.$$

Z powyższego układu równań można wyodrębnić postać macierzową:

$$\mathbf{Rw} = \mathbf{y} \quad (13)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ n \end{bmatrix},$$

gdzie:

\mathbf{R} – pomocnicza macierz interwałowa, zawierająca elementy r_{ij} .

Dochodząc do takiej postaci metody, osiągnęliśmy jedno z najważniejszych początkowych założeń, a mianowicie to mówiące o konieczności wykorzystania zmodyfikowanej metody rozwiązywania układów równań interwałowych, zaproponowanej w sekcji 2. Wykorzystanie metody z sekcji 2 jest dodatkowo zalecane dlatego, że każdy współczynnik względnej ważności $w_i = [w_i, \overline{w}_i]$ musi spełnić warunek konieczny $\underline{w}_i \geq 0$, który dla tej metody może stanowić naturalne ograniczenie nakładane na wartość parametru. Ponadto otrzymaliśmy metodę, wyznaczającą wektor współczynników względnej ważności, która w porównaniu z metodami [19] i [20] charakteryzuje się następującymi zaletami:

- wyznaczenie interwałowych współczynników względnej ważności w zaproponowanej metodzie, odbywa się przez zastosowanie szybkiego i skutecznego algorytmu macierzowego rozwiązywania układów równań;

- metoda generuje jednoznaczne wyniki końcowe w przeciwieństwie do metody [20], w wyniku której działania otrzymujemy układ równań zależnych od siebie, posiadający wiele możliwych rozwiązań, który do rozwiązania wymaga wprowadzenia arbitralnie warunków początkowych. Warunki początkowe silnie oddziałują na finalne rezultaty tej metody;

- otrzymana metoda jest niezależna od stopnia niespójności interwałowej macierzy parzystych porównań, co jest wynikiem zastosowania zagadnienia optymalizacji i minimalizacji niespójności, mogącej wystąpić przy dużym niezdecydowaniu eksperta wypełniającego macierz parzystych porównań, lub w przypadku istnienia wielu ekspertów. Omawianą wadę posiada metoda [19] - prawidłowe wyniki uzyskuje się w niej w przypadku, gdy macierz parzystych porównań jest wysoce spójna. W innym przypadku może się zdarzyć, że wynikowe współczynniki względnej ważności błędnie odzwierciedlają hierarchię ważności odpowiednich kryteriów lokalnych zagadnienia;

- zaproponowana metoda wyróżnia się ponadto tym, że wyniki jej działania nie są poddane dwukrotnej normalizacji, jak to się dzieje w przypadku metod [19] i [20].

Poniżej przedstawiony zostanie numeryczny przykład, porównujący działanie zaproponowanej w sekcji 3 metody wyznaczania interwałowych współczynników względnej ważności z wynikami, uzyskanymi dla metod [19], [20] i [23], który zaczerpnięto z pracy L. Mikhailov'a [6].

Przykład dotyczy przypadku, gdy interwałowa macierz parzystych porównań ma wymiar 3x3.

- ilość kryteriów lokalnych $n = 3$;
- interwałowa macierz parzystych porównań \mathbf{M} :
 $a_{12} = [2.5, 3.5]$, $a_{13} = [4, 6]$, $a_{23} = [1.5, 2.5]$, czyli w szczegółowej postaci:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} [1,1] & [2.5,3.5] & [4,6] \\ [1/3.5,1/2.5] & [1,1] & [1.5,2.5] \\ [1/6,1/4] & [1/2.5,1/1.5] & [1,1] \end{bmatrix}$$

W oparciu o dane z macierzy \mathbf{M} parametry równania (12) będą miały następującą postać:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} [2.112, 2.67] & [-3.9, -2.79] & [-6.25, -4.17] & [1,1] \\ [-3.9, -2.79] & [8.41, 15.58] & [-3.17, -1.9] & [1,1] \\ [-6.25, -4.17] & [-3.17, -1.9] & [20.25, 44.25] & [1,1] \\ [1,1] & [1,1] & [1,1] & [0,0] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [3,3] \end{bmatrix}.$$

Po zastosowaniu metody rozwiązywania układów równań interwałowych, zaproponowanej w sekcji 2, w celu znalezienia elementów wektora \mathbf{w} , otrzymamy następujące wyniki:

TABELA 2. Zestawienie wyników działania metody z sekcji 3 i metod [19], [20] oraz [23]

Metoda	W_1	W_2	W_3
Wyniki dla wartości rzeczywistych	0.08	0.24	0.55
Metoda zaproponowana w sekcji 3	[0, 0.07, 0.11]	[0, 0.22, 0.25]	[0, 0.57, 0.63]
Buckley	[0.09, 0.11, 0.15]	[0.24, 0.31, 0.42]	[0.42, 0.58, 0.77]
van Laarhoven, Pedrycz	[0.09, 0.11, 0.13]	[0.25, 0.31, 0.40]	[0.44, 0.58, 0.75]
Boender	[0.10, 0.11, 0.12]	[0.28, 0.31, 0.35]	[0.50, 0.58, 0.66]

Porównując otrzymane wyniki możemy zauważyć, że nie odbiegają one od siebie co do wartości. Aby ocenić obiektywnie zalety i wady przedstawionych podejść, zdecydowaliśmy się stworzyć kilka kryteriów oceny:

- porównanie wyników ze względu na zbieżność jąder wyników rozmyto-przedziałowych z wynikami uzyskanymi dla wartości rzeczywistych, będących centrami danych wejściowych;
- sprawdzenie stopnia spełnienia minimalizacji warunków normalizacji dla metod, które na nim bazują;
- wystąpienie wielokrotnej normalizacji.

Analizując otrzymane wyniki pod kątem zgodności z wynikami dla wartości rzeczywistych, a więc testując zachowanie ważnych asymptotycznych właściwości wyników zauważamy, że zaproponowana przez nas metoda generuje wyniki, które w najlepszy sposób spełniają ten warunek. Istnieją oczywiście niewielkie rozbieżności, wahające się od -0.02 do $+0.02$ (zakładając, że porównujemy wartość rzeczywistą minus jądro wartości interwałowo-rozmytej), które wobec rozbieżności -0.07 do 0.03 są znacznie mniejsze.

Także kryterium stopnia minimalizacji warunku normalizacji przemawia na naszą korzyść. Wadą tego kryterium jest jedynie to, że porównuje ono wyniki tylko dla naszej metody z sekcji 3 i dla metody van Laarhoven'a [20], ponieważ pozostałe metody oparte są na innych zasadach.

Dla zaproponowanej przez nas w sekcji 3 metody warunek minimalizujący ma postać równania:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 \rightarrow \min, \quad \text{zaś dla metody van Laarhoven'a}$$

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\ln(R_{ij}) - \ln\left(\frac{w_i}{w_j}\right) \right)^2 \rightarrow \min.$$

Przy założeniu, że do porównania bierzemy jedynie nośniki interwałowo-rozmytych wyników, otrzymujemy interwał $S=[21, 58]$ w przypadku prezentowanej metody oraz interwał $S=[24, 83]$ dla metody van Laarhoven'a. Zgodnie z zasadami porównywania interwałów, z którymi można się zapoznać w pracy [16], interwał związany z naszą metodą jest z prawdopodobieństwem 57% mniejszy od uzyskanego dla metody [20]. Taki wynik oznacza, że zastosowanie metody rozwiązywania interwałowych układów równań (sekcja 2) wpłynęło na lepsze spełnienie funkcjonału minimalizującego S . Dodatkową zaletą zaproponowanej przez nas metody wyznaczania współczynników względnej ważności jest fakt, że nie występuje w niej wielokrotna normalizacja wyników, co ma miejsce we wszystkich pozostałych metodach.

4. Interwałowa analiza i model wejścia-wyjścia.

Kolejnym przykładem, w którym zastosowaliśmy z powodzeniem opracowaną metodę rozwiązywania interwałowych układów równań, jest niezwykle efektywne narzędzie, stosowane przez ponad 60 krajów na świecie do optymalizacji procesów produkcyjnych, poprawy stanu gospodarki i analizy alokacji kosztów międzysektorowych. Tym narzędziem jest sformułowana przez W. Leontiewa analiza wejścia-wyjścia. Została ona początkowo wykorzystana do badania gospodarki Stanów Zjednoczonych [7-11]. Analiza wejścia-wyjścia jest sformalizowaną metodą wyjaśniającą zawiłe wzajemne zależności podaży, popytu, nakładów inwestycyjnych oraz kosztów w różnych sektorach złożonych systemów ekonomicznych [9].

Interwałowe rozszerzenie modelu W. Leontiefa oparte zostało na klasycznym (dla liczb rzeczywistych) modelu wejścia-wyjścia [8]. Przy jego formułowaniu wzorowaliśmy się na pracy badawczej C.C. Wu i N.B. Chang [14]. Rozszerzenie to pociągnęło za sobą konieczność modyfikacji tabeli wejścia-wyjścia, na której ta analiza bazuje, również do postaci interwałowej. Budowa i wygląd najczęściej wykorzystywanej interwałowej tabeli wejścia-wyjścia przedstawia Tabela 3.

TABELA 3. Typowy format uproszczonej tabeli stosowanej w interwałowej analizie wejścia-wyjścia dla zastosowań ekonomicznych.

	Pośrednie wyjścia w sektorach produkcyjnych i usługowych 1, ..., m	Końcowe wyjście dla sprzedaży i zapasów	Całkowite wyjście dla sektora
Pośrednie wejścia w sektorach produkcyjnych i usługowych 1, ..., m	$x_{i,j}$	f_i	$xout_i$
Zewnętrzne wejścia 1, ..., l	$er_{k,j}$		
Wejścia dla innych zasobów 1, ..., g	$t_{h,j}$		
Całkowite wejście dla danego sektora	xin_j		

Proponowany model interwałowy umożliwia pełną analizę najczęściej spotykanych sektorów w przedsiębiorstwach produkcyjnych i usługowych. Towarzysząca mu tabela opisuje główne wejścia (źródła surowców, półproduktów, źródeł finansowania, zobowiązania, amortyzacja) oraz typowe wyjścia (sprzedaż i zapasy). Formułowany model musi być zgodny ze standardem, więc powinien uwzględniać jedno wyjście dla każdego sektora, jedno lub wiele wejść, powinien opierać się na głównej interwałowej, kwadratowej macierzy produkcyjnej, zawierającej ustalone w danej chwili współczynniki wejścia-wyjścia, oraz być zależny od tzw. liniowej, jednorodnej funkcji produkcyjnej.

Dla uproszczenia analizy formułowanego modelu na początku przedstawimy wszystkie wymagane oznaczenia:

$x_{i,j}$ – interwałowe współczynniki wejścia-wyjścia, określające wymagania wobec produktu i przez sektor j , gdzie $i, j = 1, \dots, m$, m – ilość sektorów lub produktów, $er_{k,j}$ – interwałowe wartości, określające tzw. zewnętrzne wejścia (np. zewnętrzne źródła zaopatrzenia) takie jak materiał produkcyjny k wymagany przez sektor produkcyjny j , $k = 1, \dots, l$, gdzie l liczba wejść zewnętrznych, $j = 1, \dots, m$,

$t_{h,j}$ – wejście innych zasobów, takich jak amortyzacja, ubezpieczenia h , wymagane przez sektor j , $h = 1, \dots, g$, gdzie g – liczba pozostałych zasobów, $j = 1, \dots, m$,

$xout_i$ – całkowite wyjście (podaż, produkcja) dla sektora (produktu) i ,
 $i = 1, \dots, m$,
 xin_j – całkowite wejście dla sektora j uwzględniając produkt $i, j = 1, \dots, m$,
 f_i – końcowa (zewnętrzna) sprzedaż i zapasy produktu $i, i = 1, \dots, m$.

Możemy teraz przystąpić do formułowania kompletnego interwałowego modelu wejścia-wyjścia do typowych zastosowań gospodarczych. Elementarne całkowite wyjście, odpowiadające danemu sektorowi, opisujące zapotrzebowanie na zasób i , jest wyrażone jako suma wszystkich współczynników $x_{i,j}$ dotyczących analizowanego sektora i odpowiedniej wartości końcowego wyjścia f_i :

$$xout_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} + f_i. \quad (14)$$

Natomiast elementarne całkowite wejście dla sektora j może być przedstawione jako suma wartości wszystkich wejść zasilających produkcję w danym sektorze:

$$xin_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} + \sum_{k=1}^l er_{k,j} + \sum_{h=1}^m t_{h,j} \quad (15)$$

Aby przejść do formułowania macierzowej postaci interwałowej analizy wejścia-wyjścia, musimy podobnie jak to ma miejsce w klasycznym modelu, zdefiniować tzw. technologiczne współczynniki wejścia-wyjścia, określające procentowy udział każdego wejścia w całkowitym wejściu dla konkretnego sektora:

$$\nabla a_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{xin_j}, \quad \nabla er_{k,j} = \frac{er_{k,j}}{xin_j}, \quad \nabla t_{h,j} = \frac{t_{h,j}}{xin_j}. \quad (16)$$

lub w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} = [\nabla a_{i,j}]_{n \times n}, \quad \mathbf{ER} = [\nabla er_{k,j}]_{l \times n}, \quad \mathbf{T} = [\nabla t_{h,j}]_{m \times n} \quad (17)$$

Na podstawie zależności (16) możemy przekształcić główne równanie (14) interwałowego modelu wejścia-wyjścia do postaci:

$$xout_i = \sum_{j=1}^n \nabla a_{i,j} \times xin_j + f_i \quad (18)$$

a następnie zastąpić je macierzowym równoważnikiem:

$$\mathbf{xout} = \mathbf{A} \times \mathbf{xin} + \mathbf{f} \quad (19)$$

Jeżeli dla uproszczenia całego toku analizy założymy, że $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{L}$, przy czym \mathbf{L} – określamy jako tzw. interwałową odwrotną, kwadratową macierz Leontiewa, to możemy zapisać, że:

$$\mathbf{xout} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \times \mathbf{f} = \mathbf{L} \times \mathbf{f}. \quad (20)$$

Najczęściej spotykane rozwiązania dla interwałowego modelu wejścia-wyjścia bazują na poszukiwaniu pewnych podmodeli, które mają na celu znaleźć wartości osobno dla lewych i prawych granic interwałów opisujących koszt i wielkość produkcji. Rozwiązania takie, nie eliminujące z modelu odwracania macierzy produkcyjnej, mają niewiele wspólnego z zasadami rządzącymi arytmetyką przedziałową. W odróżnieniu od nich proponowane przez nas rozwiązanie w pełni wykorzystuje metodologię interwałową, a ponadto w aspekcie wyznaczania wielkości produkcji w poszczególnych sektorach eliminuje całkowicie konieczność odwracania interwałowej macierzy $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ współczynników wejścia-wyjścia.

Możemy zauważyć, że równanie (20), opisujące wielkość prognozowanej produkcji da się przekształcić do równoważnej postaci:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \times \mathbf{xout} = \mathbf{f} \quad (21)$$

Zależność (21) jest niczym więcej niż liniowym interwałowym równaniem macierzowym. Problem rozwiązania modelu wejścia-wyjścia redukuje się więc do problemu znalezienia optymalnego algorytmu rozwiązywania interwałowych układów równań, który oszacuje wartość produkcji \mathbf{xout} . Takim algorytmem jest w tym przypadku zaproponowana w sekcji 2 metoda rozwiązywania interwałowych układów równań. Dzięki tej metodzie możliwe jest uzyskanie rozmyto-interwałowe wartości prognozy w danym sektorze, opisującej najbardziej prawdopodobne i maksymalne wartości wielkości produkcji.

Wykorzystując tak sformułowany interwałowy model wejścia-wyjścia, można oszacować wielkość produkcji dla wszystkich wyrobów (produktów), koszty funkcjonowania sektorów oraz ilość wymaganych zasobów wejściowych. Mechanizm ten pomaga uniknąć sytuacji nadprodukcji albo nadmiarowego zużycia surowców.

5. PODSUMOWANIE

Głównym celem niniejszej pracy było przedstawienie propozycji metody rozwiązywania interwałowych układów równań, która w jak największym stopniu wyeliminuje wewnętrzne problemy arytmetyki przedziałowej, dotyczące gwałtownego rozszerzania interwałów wynikowych w przypadku, gdy dany algorytm zawiera dużą liczbę operacji mnożenia i dodawania danych interwałowych. Ponadto w pewnym stopniu zaproponowana metoda eliminuje problem istnienia zera interwałowego, szczególnie w przypadku operacji dzielenia. Warto wspomnieć, że wynikiem działania zaprezentowanej metody są wartości rozmyte, mogące w sposób bardziej szczegółowy (w stosunku do zwykłych interwałów) opisywać niepewność parametrów w rozpatrywanych zagadnieniach. Przedstawione podejście zostało zilustrowane dwoma przykładami, związanymi ze wspomaganie podejmowania optymalizowanych decyzji gospodarczych i ekonomicznych. W pierwszym przykładzie zastosowanie zaproponowanej metody wpłynęło na zmniejszenie niepewności współczynników względnej ważności i polepszyło ich własności asymptotyczne. Drugi przykład, dotyczący analizy wejścia-wyjścia, przedstawia jedynie fragment całej metody i posłużył on tylko do prezentacji jednej z możliwych modyfikacji metody Leontiewa do postaci, w której możliwe jest wyeliminowanie etapu odwracania tzw. głównej interwałowej macierzy technologicznej.

Rozpatrywane przykłady zastosowań pozwalają wysnuć wniosek, że zaprezentowana metoda rozwiązywania interwałowych układów równań liniowych jest uniwersalna i może być z powodzeniem stosowana w zagadnieniach, które wymagają rozwiązania równań interwałowych bądź układów równań interwałowych.

LITERATURA

- [1] Moore R.E., *Interval analysis*, Englewood Cliffs. N.J., Prentice-Hall 1966.
- [2] Markov S.M., *A non-standard subtraction of intervals*, Serdica 1977, 3, 359-370.
- [3] Hansen E., *A generalized interval arithmetic*. Interval Mathematics/ Ed. by K.Nicke, Lecture Notes in Computer Science, 29, Berlin - Heidelberg: Springer-Verl. 1975, 7-18.
- [4] Sendov B., *Some topics of segment analysis*, Interval Mathematics, 1980/ Ed. by K.Nickel. N.Y.e.a.: Academic Press 1980, p. 203-222.

- [5] Caprani O., Madsen K., *Mean value forms in interval analysis*, Computing 1980, 25, 2, 147-154.
- [6] Mikhailov L., *Deriving priorities from fuzzy pairwise comparison judgments*, Fuzzy Sets and Systems 2003, 134, 365-385.
- [7] Leontief, W. W. (1985). *The Choice of Technology*, Scientific American, pp. 37-45.
- [8] Leontief, W. W. (1949), *The Structure of the American Economy*, 1919-1935, Oxford University Press, London & New York.
- [9] Leontief, W. W. and Daniel, F. (1972). "Air Pollution and the Economic Structure: Empirical Results of Input-Output Computations." Input-Output Techniques. Brody, A. and Carter, A. P., editors. North-Holland Publishing Company.
- [10] W. Leontief, *Quantitative input-output relations in the economic system of the United States*, Review of Economics and Statistics 18 (1936) 100-125.
- [11] W. Leontief, *Studies in the Structure of the American Economy*, Oxford University Press, New York, 1953.
- [12] D.G. Luenberger, A. Arbel, *Singular dynamic Leontief systems*, Econometrica 45 (1977) 991-995.
- [13] R.E. Moore, *Method and Application of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, USA, 1979.
- [14] C.C. Wu, N.B. Chang, *Grey input-output analysis and its application for environmental cost allocation*, European Journal of Operational Research 145 (2003), p. 175-201
- [15] F.E. Briggs, *On problems of estimation in Leontief models*, Econometrica 25 (1975) 411-455.
- [16] Sewastianow P., Róg P., A. A. Wenberg, *Constructive Numerical Method for the Comparison of Intervals*, Proc. of The 4th Int. Conf. PPAM 2001, Nałęczów 2001, p. 756 – 761
- [17] P. – T. Chang , E. S. Lee, *The Estimation of Normalized Fuzzy Weights* . : Department of Industrial Engineering , Kansas State University, Computers Math. Application, Vol. 29, No. 5, pp. 21-42, 1995
- [18] Saaty T. , *Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures*. – 1977.- Vol. 15 No3 - P.234. –281
- [19] J.Buckley, *Fuzzy hierarchical analysis* , Fuzzy Sets and Systems 17 (1985) 233 – 247.
- [20] P.J.M. van Laarhoven, W. Pedrycz, *Fuzzy extension for Saaty's priority theory*, Fuzzy Sets and Systems 11 (1983) 229 – 241.
- [21] T.L. Saaty, *Multicriteria Decision Making : The Analytic Hierarchy Process*, RSW Publications, Pittsbutg, PA,1988.
- [22] A. Chu, R. Kalaba, R. Springarn, *A Comparition of Two Methods for Determining the weight of Belonging to Fuzzy Sets*, Journal of Optimisation theory and applications. – 1979. – vol. 27. – No 4. – p. 531-538.

- [23] C.G.E. Boender, J.G. de Grann and F.A. Lootsma, *Multi-criteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons*, Fuzzy Sets and Systems 29, 133-143 (1989)
- [24] F.A. Lootsma, *Performance evaluation of nonlinear optimization via pairwise comparison and fuzzy numbers*, Mathematical Programming 33, 93-114 (1985).