# Dwukryterialna, rozmyta optymalizacja portfela papierów wartościowych przy zastosowaniu trzech metod agregacji kryteriów lokalnych.

Monika Jończyk
e-mail, monika@zapr.com.pl
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, Politechnika Częstochowska
ul Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa

**Streszczenie**: Artykuł poświęcony jest zagadnieniu optymalizacji portfela akcji w warunkach niepewności rozmytej. Przedstawiony problem został sformułowany jako zagadnienie nieliniowego, rozmytego, dwukryterialnego programowania, przy czym zastosowane zostały trzy najpopularniejsze metody agregacji kryteriów lokalnych. Opisana metoda oparta jest na zagadnieniach dotyczących problemu porównywania liczb przedziałowych i rozmyto-przedziałowych. Proponowana metoda dwukryterialna może być w pewnym sensie rozpatrywana jako uogólnienie istniejących metod jednokryterialnych, co zostało zilustrowane konkretnym przykładem. W celu rozwiązania problemu opracowana została metoda oparta na agregowaniu lokalnych kryteriów maksymalizacji rentowności portfela i minimalizacji ryzyka. Jak zostało pokazane, tak sformułowany problem dostarczył rozwiązań, które uogólniają, jako wyniki szczegółowe, wyniki uzyskane przy użyciu najbardziej renomowanych podjęść jednokryterialnych.
**Słowa kluczowe***:* Selekcja portfela; Programowanie rozmyte nieliniowe; Zagadnienie optymalizacji dwukryterialnej; Porównywanie przedziałów, liczb rozmytych

## 1. Wstęp

Problem optymalizacji portfela papierów wartościowych jest jednym z ważniejszych zagadnień w teorii i praktyce działalności finansowych. W pionierskiej pracy Markowitza [3] zagadnienie portfelowe rozwiązano z uwzględnieniem niepewności informacji wstępnych (ceny akcji oraz ich dochodowości) za pomocą metod teorii prawdopodobieństwa, przy tym parametry niepewne przedstawione zostały w postaci gęstości zmiennych losowych. Poważnym uproszczeniem realnej sytuacji używanym w ramach klasycznego podejścia jest rozpatrywanie tylko jednego kryterium. Zakładano, że inwestor ma na celu minimalizację np. ryzyka przy gwarantowanym poziomie dochodu lub przeciwnie maksymalizację dochodu przy ograniczonym poziomie ryzyka. Jednak w praktyce, możliwości tego bardzo atrakcyjnego z teoretycznego punktu widzenia podejścia są ograniczone właśnie naturą rynku finansowego. Jak udowodnili czołowi amerykańscy specjaliści w tej dziedzinie [18], główne założenie teorii Markowitza o występowaniu normalnych rozkładów prawdopodobieństwa opisujących parametry finansowe, najczęściej nie zdarza się w praktyce. Oprócz tego rozkłady prawdopodobieństw nie są stałe, z czego wynika ze trudno przewidywać ich formy, jeżeli chodzi o planowanie przyszłego portfela. Wymienione problemy zostały w dużej mierze rozwiązane wraz z pojawieniem się teorii zbiorów rozmytych [19]. Dziś można przytoczyć cały szereg prac w tej dziedzinie [1]-[5], [8], [11]-[13]. Główną zaletą podejścia rozmytego jest możliwość zmiany gęstości prawdopodobieństwa parametrów finansowych przez odpowiednie dobranie funkcji przynależności zbiorom rozmytym, co pozwala na uwzględnienie dowolnej struktury danych otrzymanych w trakcie badań statystycznych rynku papierów wartościowych. Hipoteza normalności rozkładów prawdopodobieństw nie jest już potrzebna, dodatkową zaletą jest także możliwość wykorzystania wiedzy, doświadczenia i intuicji ekspertów do opisania funkcji przynależności. Prawie wszystkie wymienione powyżej prace, redukują sformułowane w sposób rozmyty zagadnienie do szeregu związanych między sobą problemów programowania liniowego. Przy tym używane są różnego rodzaju aproksymacje liniowe funkcji przynależności opisujących parametry finansowe, co można rozpatrywać jako poważne ograniczenie, ze względu na to, że rzeczywiste funkcje przynależności otrzymane w trakcie badań statystycznych rynku finansowego mogą mieć bardzo skomplikowane formy. Tylko w [13] problem portfelowy sformułowany został jako zagadnienie programowania nieliniowego. Warto zaznaczyć, że wszystkie wymienione powyżej podejścia oparte na metodach teorii zbiorów rozmytych , naśladują w pewnym sensie ideologię klasycznego podejścia Markowitza, ponieważ wyodrębniają tylko jedno kryterium , które trzeba maksymalizować lub minimalizować w zależności od sytuacji. Wynika z tego, że istniejące podejścia do problemu portfelowego w ramach teorii zbiorów rozmytych są w gruncie rzeczy jednokryterialne.

Jednak wielokryterialność problemu portfelowego odnotowana została jeszcze na poziome merytorycznym przez specjalistów z dziedziny finansów [7], [8], [9], [10].

W przedstawianym artykule zagadnienie optymalizacji portfela sformułowane zostało w formie zagadnienia wielokryterialnego , nieliniowego, rozmytego programowania. Uwzględniono rywalizujące lokalne kryteria maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka. Zostały zastosowane i porównane trzy metody agregacji kryteriów lokalnych. W trakcie realizacji algorytmu numerycznego realizującego proponowaną metodę używane jest oryginalne probabilistyczne podejście do porównywania liczb rozmytych.

## 2. Narzędzia matematyczne.

Ponieważ w ramach proponowanego podejścia bezpośrednio używane są operacje na liczbach rozmytych , poniżej przedstawione zostały podstawowe pojęcia z teorii zbiorów rozmytych.

Zbiór rozmyty *A* można zdefiniować jako:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \quad \mu_A(x) \in [0,1]\},$$

gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ jest funkcją przynależności elementów *X* do zbioru *A*.

Funkcja przynależności stanowi uogólnienie funkcji charakterystycznej, zbiór rozmyty zaś – uogólnienie zbioru zwykłego.

Najbardziej konstruktywnym podejściem do implementacji arytmetyki rozmytych przedziałów jest podejście oparte na reprezentacji przedziału rozmytego za pomocą α- przekrojów .

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_\alpha,$$

gdzie $A_\alpha$ jest przedziałem $\{x: \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha A_\alpha$ jest przedziałem rozmytym $\{(x, \alpha): x \in A_\alpha\}$.

Niech *A* i *B* będą rozmytymi przedziałami. Zostało udowodnione, że wszystkie operacje na tych rozmytych przedziałach mogą zostać sprowadzone do operacji na przedziałach ostrych odpowiadających α- przekrojom:

$$(A @ B)_\alpha = A_\alpha @ B_\alpha$$

Z tego powodu problemy arytmetyki przedziałów rozmytych można zredukować do problemu arytmetyki ostrych przedziałów.

W przypadku prezentacji liczby rozmytej w postaci α- przekrojów, która opiera się o liczby przedziałowe, należy przedstawić podstawowe pojęcia dotyczące arytmetyki przedziałowej.

Istnieje kilka definicji arytmetyki przedziałowej, ale udowodniono, że przy zastosowaniu ich w praktycznych aplikacjach tak zwana forma „naiwna” jest formą najlepszą. Według tego, jeśli $A = [a_1, a_2]$ i $B = [b_1, b_2]$ są przedziałami, wtedy

$Z = A@B=\{ z=x@y,\ \ \forall x \in A, \forall y \in B \}$.

Bezpośrednią konsekwencją powyżej definicji są następujące wyrażenia:

$A+B=[a_1+b_1, b_2+b_2]$, $A\text{-}B=[a_1\text{-}b_2, a_2\text{-}b_1]$,

$A\cdot B=[min(a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2, a_1\cdot b_2, a_2\cdot b_1), max(a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2, a_1\cdot b_2, a_2\cdot b_1)]$,

$A/B=[a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]$

Oczywiście istnieje wiele wewnętrznych problemów stosowanej analizy przedziałowej, np. dzielenie przez przedział zawierający zero, ale generalnie może być ona rozważana jako dobre narzędzie matematyczne dla modelowania i podejmowania decyzji w warunkach niepewności.

Ponieważ założone zostało, że liczba rozmyta reprezentowana będzie przez zbiór jej $\alpha$-przekrojów, które są w gruncie rzeczy, zborem zwykłych przedziałów, można więc użyć arytmetyki przedziałowej, by rozwiązać problem porównywania przedziałów rozmytych.

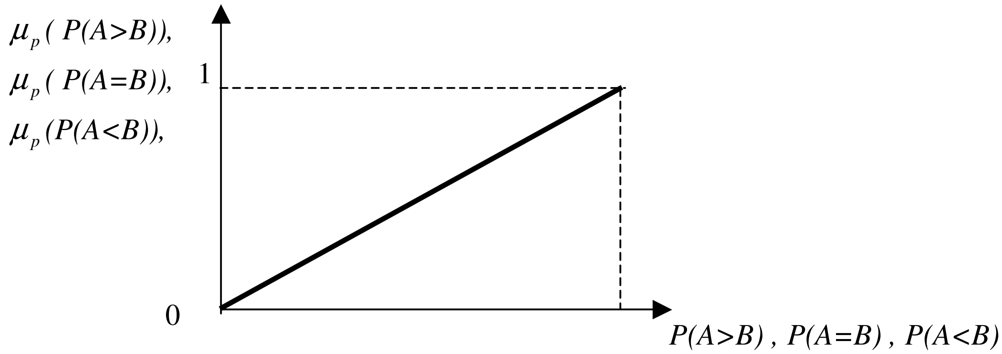
Kluczowym problemem w zagadnieniach optymalizacji rozmyto - przedziałowych jest porównywanie liczb lub przedziałów rozmytych. Oczywistym jest, że w ramach opisanego powyżej podejścia problem porównywania przedziałów rozmytych redukuje się do porównywania przedziałów ostrych. Należy zaznaczyć, że porównywanie przedziałów jest problemem bardzo kontrowersyjnym. Istnieją dziesiątki podejść do formułowania tej procedury, ale będziemy używali podejścia probabilistycznego, proponowanego w pracach [16] i [17]. Zaletą tego podejścia jest używanie tylko jednego podstawowego założenia, że przedział jest przedziałem stałej gęstości zmiennej losowej . Na podstawie tego, bez dodatkowych przypuszczeń, w pracach [16] i [17] udało się otrzymać kompletny zbiór wzorów dla prawdopodobieństwa nierówności $P(A<B)$ i równości $P(A=B)$ przedziałów ostrych i rozmytych oraz przedziałów i liczb rzeczywistych. Jednak proponowana w [16] i [17] metoda pozwala tylko na ocenę prawdopodobieństwa np. że B>A przy tym nie uwzględnia ona w sposób jawny stosunków szerokości porównywanych przedziałów, które mają dla nas poważne znaczenie. Rzeczywiście jeżeli chcemy maksymalizować rozmyto - przedziałowy dochód sumaryczny portfela inwestycji, jednocześnie chcielibyśmy zmniejszyć ryzyko finansowe przedstawione bezpośrednio przez szerokości przedziałów w punkcie optimum tzn. że w trakcie realizacji algorytmu numerycznego na każdym jego kroku chcielibyśmy zwiększyć prawdopodobieństwo wzrostu otrzymanej przedziałowej/rozmyto przedziałowej wartości dochodu przy jednoczesnym zmniejszeniu szerokości reprezentującego ją przedziału. Podejście takie zostało użyte w [20].

Dlatego poniżej proponowane jest dwu-kryterialne podejście dla porównywania przedziałów ostrych i rozmytych w zagadnieniach optymalizacji w warunkach niepewności ( ryzyka ).

Pierwsze kryterium lokalne może zostać wyrażone przez funkcję przydatności (dla problemu wyboru większego przedziału) przedstawioną na rys. 1. Zgodnie z tym kryterium, im większe jest prawdopodobieństwo $A>B$, tym większa wartość funkcji kryterialnej $\mu_p(P(A>B))$. Analogicznie dla przedziału $B$.

W ogólnym przypadku, można zapisać te kryteria jako:

$$\mu_p(P(A>B)),\ \mu_p(\,P(A=B)),\ \mu_p(\,P(A<B)),$$



Rys. 1. Kryterium użyteczności dla prawdopodobieństwa *P(A>B) i P(A<B) i P(A=B)*

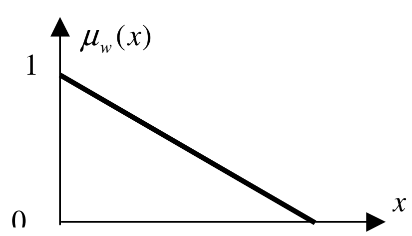
Drugie kryterium, związane z oceną ryzyka, może zostać przedstawione przez stosunek szerokości porównywanych przedziałów jak na Rys. 2.

W przypadku ogólnym, można kryterium to zapisać w następującej postaci:

$$\mu_w(x_A) = 1 - x_A \quad \text{, gdzie} \quad x_A = \frac{W_A}{\max(W_A, W_B)}$$

$$\mu_w(x_B) = 1 - x_B \quad \text{, gdzie} \quad x_B = \frac{W_B}{\max(W_A, W_B)}$$

Jasnym jest, że wartość kryterium jest tym większa, im mniejsza szerokość ocenianego przedziału, względem szerokości przedziału, z którym go porównujmy. W praktyce, dla przedziału szerszego wartość kryterium wynosi *0*. Jeżeli np. porównujemy przedziały, *A* i *B*, i okazuje się, że przedział *B* jest szerszy, wówczas w $x_B$ w mianowniku i liczniku występuje ta sama wartość, co daje wynik równy 1, dlatego $\mu_w(x_B) = 1 - 1 = 0$ , natomiast w przeciwnym wypadku $\mu_w(x_A) = 0$. Dla przedziału o mniejszej szerokości, wartość kryterium jest tym większa im większa jest różnica szerokości pomiędzy przedziałami. Jeśli przedział węższy ma szerokość równą *0*, wartość kryterium dla tego przedziału wynosi 1. W przypadku, kiedy oba przedziały mają szerokość równą *0*, czyli są zdegenerowane, rozsądnym wydaje się przyjęcie dla obu przedziałów wartości tego kryterium równej *0*, co wyeliminuje z oceny kryterium ryzyka, które traci w tym momencie swój sens.



Rys. 2. Kryterium użyteczności dla względnej szerokości przedziałów

Sformułowane zostały dwa kryteria lokalne, w praktyce zawsze zachowujące się kontrowersyjnie , ponieważ otrzymanie większego zysku, bardziej prawdopodobne jest przy odpowiednim zwiększeniu ryzyka. Dlatego też wprowadzamy współczynniki względnej ważności kryteriów $r_p$, $r_w$ charakteryzujące

odpowiednio preferencje dycydenta, co do rentowności i ryzyka. Współczynniki te muszą spełniać ogólnie przyjęte ograniczenie
$(r_p + r_w)/2=1$.

Mając określone dla problemu optymalnej selekcji portfela lokalne kryteria prawdopodobieństwa i ryzyka oraz współczynniki ich względnej ważności można skonstruować globalne kryteria umożliwiające porównanie przedziałów, za pomocą 3 sposobów agregowania kryteriów lokalnych : addytywnego (1-3) , multiplikatywnego (4-6) oraz maksymalnego pesymizmu (7-9), uwzględniając rangi $r_p$, $r_w$ podane przez eksperta.

Kryteria globalne skonstruowane za pomocą addytywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych :

$$D_{A<B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A<B)) + r_w\mu_w(x_A)) \quad , \qquad (1)$$

$$D_{A>B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A>B)) + r_w\mu_w(x_B)) \quad , \qquad (2)$$

$$D_{A=B}(A,B) = \max\{\ D'_{A=B}(A,B), D''_{A=B}(A,B)\} \quad , \qquad (3)$$

gdzie:

$$D'_{A=B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A=B)) + r_w\mu_w(x_A)) \quad ,$$

$$D''_{A=B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A=B)) + r_w\mu_w(x_B)) \quad ,$$

Kryteria globalne skonstruowane za pomocą multiplikatywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych :

$$D_{A<B}(A,B) = (\mu_p(P(A<B)))^{r_p}\cdot(\mu_w(x_A))^{r_w} \quad , \qquad (4)$$

$$D_{A>B}(A,B) = (\mu_p(P(A>B)))^{r_p}\cdot(\mu_w(x_B))^{r_w} \quad , \qquad (5)$$

$$D_{A=B}(A,B) = \max\{\ D'_{A=B}(A,B), D''_{A=B}(A,B)\} \quad , \qquad (6)$$

gdzie:

$$D'_{A=B}(A,B) = (\mu_p(P(A=B)))^{r_p}\cdot(\mu_w(x_A))^{r_w} \quad ,$$

$$D''_{A=B}(A,B) = (\mu_p(P(A=B)))^{r_p}\cdot(\mu_w(x_B))^{r_w} \quad ,$$

Kryteria globalne skonstruowane za pomocą sposobu maksymalnego pesymizmu agregacji kryteriów lokalnych :

$$D_{A<B}(A,B) = \min\{(\ \mu_p(P(A<B)))^{r_p}, (\mu_w(x_A))^{r_w}\} \quad , \qquad (7)$$

$$D_{A>B}(A,B) = \min\{(\mu_p(P(A>B)))^{r_p}, (\mu_w(x_B))^{r_w}\} \quad , \tag{8}$$

$$D_{A=B}(A,B) = \max\{D'_{A=B}(A,B), D''_{A=B}(A,B)\} \quad , \tag{9}$$

gdzie:

$$D'_{A=B}(A,B) = \min\{(\mu_p(P(A=B)))^{r_p}, (\mu_w(x_A))^{r_w}\} ,$$

$$D''_{A=B}(A,B) = \min\{(\mu_p(P(A=B)))^{r_p}, (\mu_w(x_B))^{r_w}\} .$$

Przedstawione powyżej kryteria globalne wymagają kilku słów komentarza.

Pierwsze kryterium globalne $D_{A<B}(A,B)$ dotyczy sytuacji w której, sprawdzane jest spełnienie warunku $A < B$. Występują tu dwa kryteria lokalne $\mu_p$-odpowiadające za zysk, określające prawdopodobieństwo przypadku że $B>A$, oraz $\mu_w$ -odpowiadające za ryzyko, czyli dotyczące szerokości przedziałów $A$ i $B$. Drugie kryterium globalne $D_{A>B}(A,B)$ dotyczy sytuacji dokładnie przeciwnej do opisanej powyżej, a więc przypadku gdy $A > B$. Trzecie kryterium globalne dotyczy sytuacji gdy $A=B$. Kryterium to składa się z dwóch podkryteriów globalnych: $D'_{A=B}(A,B)$ i $D''_{A=B}(A,B)$, równe jest temu podkryterium, które jest większe. Podkryteria $D'_{A=B}(A,B)$ i $D''_{A=B}(A,B)$ skonstruowane są na tej samej zasadzie jak kryterium globalne pierwsze i drugie, czyli z dwóch kryteriów lokalnych.

**3. Metoda rozmytej optymalizacji portfela papierów wartościowych**

Zadanie sformułowane jest jako zadanie optymalizacji portfela, uogólniające podejście klasyczne.

Rozmyty dochód sumaryczny portfela:

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \hat{C}_j \tag{10}$$

gdzie: $\hat{F}$ – rozmyto- przedziałowy dochód portfela ; $x_j$ – udział akcji $j$-tej w portfelu ( liczba rzeczywista);

$\hat{C}_j$ – rozmyto- przedziałowa stopa zysku z $j$-tej akcji .

Jednocześnie użyte zostało standardowe ograniczenie :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 . \tag{11}$$

Oczywiście problem polega na maksymalizacji dochodu $\hat{F}$ w sensie opisanego w rozdziale 2 podejścia probabilistycznego przy jednoczesnym wypełnieniu kryterium minimalizacji ryzyka , czyli minimalizacji szerokości $\hat{F}$. Dlatego w zgodzie z wynikami z rozdziału 2, metoda numeryczna dwu kryterialnej maksymalizacji $\hat{F}$ z uwzględnieniem wzorów (1)-(3), lub (4)-(6), lub (7)-(9) (w zależności od zastosowanego sposobu agregacji) może być przedstawiona jako stopniowe (krok po kroku) maksymalizowanie globalnego kryterium, które w przypadku

- addytywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych ma postać :

$$D_{\hat{F}_k<\hat{F}_{k+1}}(\hat{F}_k,\hat{F}_{k+1})=\frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(\hat{F}_k<\hat{F}_{k+1}))+r_w\mu_w(x_{\hat{F}_k})) \tag{12}$$

- multiplikatywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych ma postać :

$$D_{\hat{F}_k<\hat{F}_{k+1}}(\hat{F}_k,\hat{F}_{k+1})=(\mu_p(P(\hat{F}_k<\hat{F}_{k+1})))^{r_p}\cdot(\mu_w(x_{\hat{F}_k}))^{r_w} \tag{13}$$

- maksymalnego pesymizmu sposobu agregacji kryteriów lokalnych ma postać :

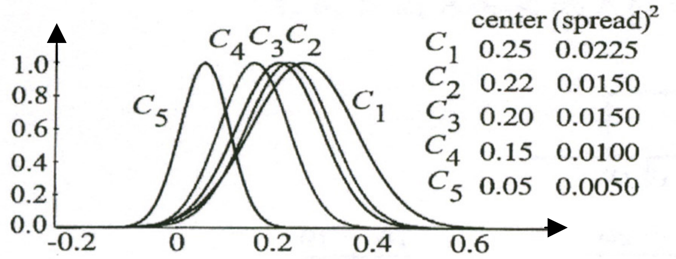
$$D_{\hat{F}_k<\hat{F}_{k+1}}(\hat{F}_k,\hat{F}_{k+1})=\min\{(\mu_p(P(\hat{F}_k<\hat{F}_{k+1})))^{r_p},(\mu_w(x_{\hat{F}_k}))^{r_w}\} \tag{14}$$

gdzie: *k*- numer poszczególnych kroków przejść algorytmu, $\hat{F}_{\boldsymbol{k}}$- dochód rozmyto- przedziałowy (patrz wyrażenie (10)) w kroku *k*, $\mu_w(x_{\hat{F}_k})=1-x_{\hat{F}_k}$ - kryterium lokalne odpowiadające za ryzyko, $x_{\hat{F}_k}=\dfrac{W_{\hat{F}_k}}{\max(W_{\hat{F}_k},W_{\hat{F}_{k+1}})}$ , $W_{\hat{F}_k}$ -szerokość przedziału funkcji *F* w kroku *k*, $W_{\hat{F}_{k+1}}$ -szerokość przedziału funkcji *F* w kroku *k+1*, $\mu_p(P(\hat{F}_k<\hat{F}_{k+1}))$ - kryterium lokalne odpowiadające za zysk.

W celu realizacji algorytmu numerycznego opracowane zostało rozmyto - przedziałowe rozszerzenie algorytmu bezpośredniego poszukiwania losowego [15]. Do tego algorytmu została wprowadzona dodatkowa metoda losowego wyboru wektora $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ umożliwiająca spełnienie ograniczenia (11). Wszystkie operacje rozmyto przedziałowe w tym operacja porównywania przedziałów rozmytych opracowane zostały za pomocą programowania obiektowego. W celach porównania dostępnych metod agregacji kryteriów lokalnych zostały opracowane trzy wersje programu, dla każdego rodzaju agregacji.

## 4.Przykład dwu-kryterialnej, rozmytej optymalizacji portfela pięciu akcji.

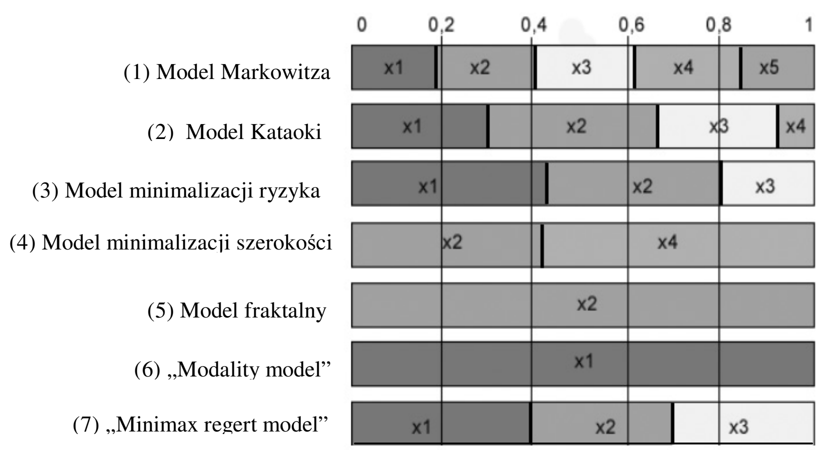
W celu porównywania rezultatów otrzymanych za pomocą proponowanego podejścia z wynikami innych autorów, użyty został przykład dokładnie przedstawiony w [4]. W tej pracy rozpatrywano przykład portfela składającego się z pięciu rodzajów papierów wartościowych, przewidywane zyski opisane zostały funkcjami przynależności podobnymi do normalnych rozkładów Gaussa (patrz Rys. 3).




Rys. 3 Rozmyto-przedziałowe wartości oczekiwanego zysku z akcji $C_1$,$C_2$,$C_3$,$C_4$,$C_5$, [4]

Patrząc na Rys. 3 bez przeprowadzania dodatkowych wyliczeń, można wywnioskować, że wystąpienie w jakimkolwiek portfelu jednocześnie akcji typu $C_2$ i akcji typu $C_3$ jest nie możliwe ze względu na to, że przy jednakowym ryzyku akcje typu $C_2$ charakteryzują się większym oczekiwanym zyskiem. Stąd wynika też, że jeżeli portfel nie zawiera akcji typu $C_2$ nie powinien też zawierać akcji typu $C_3$. Jak widać z Rys. 4 większość podejść klasycznych jednokryterialnych nie uwzględnia tego oczywistego faktu. W sytuacjach rzeczywistych tego rodzaju nieprawidłowości podejść klasycznych są oczywiście tuszowane przez istnienie dużej ilości akcji.

Zgodnie z metodologią opisaną w rozdziale 2, przedstawione na Rys. 3 funkcje przynależności zostały przekształcone w odpowiednie zbiory α-przekrojów po czym zastosowano procedurę optymalizacji opisaną w rozdziale 2. W tabelach 1-3, przedstawione zostały wyniki otrzymane przy zastosowaniu różnych metod agregacji kryteriów lokalnych, dla różnych współczynników względnej ważności kryteriów maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka . Należy zaznaczyć, że w trakcie zmiany wartości tych współczynników otrzymano (jako przypadki szczegółowe) rezultaty przedstawione w pracy [4], wynikające z najbardziej renomowanych jednokryterialnych metod : minimalizacji rozpiętości, fraktalnych, „Modality model".




Rysunek 4 . Wyniki uzyskane przy siedmiu różnych podejściach jednokryterialnych (klasycznych) [4]

Tabela 1 Wyniki uzyskane przy zastosowaniu addytywnej metody agregacji kryteriów lokalnych

| **Ws $r_p$** | **Ws $r_w$** | **$x_1$** | **$x_2$** | **$x_3$** | **$x_4$** | **$x_5$** | **Metoda klasyczna patrz Rys.4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | (6) |
| 0,5972 | 1,4028 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | (6) |
| 0,5971 | 1,4029 | 0,70 | 0,30 | 0 | 0 | 0 | |
| 0,5970 | 1,4030 | 0,6 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | |
| 0,5969 | 1,4031 | 0,44 | 0,56 | 0 | 0 | 0 | |
| 0,5968 | 1,4032 | 0,23 | 0,77 | 0 | 0 | 0 | |
| 0,5960 | 1,4040 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | (5) |
| 0,4000 | 1,6000 | 0 | 0,99 | 0 | 0 | 0 | |
| 0,2620 | 1,7380 | 0 | 0,92 | 0 | 0,08 | 0 | (4) |
| 0,2600 | 1,7400 | 0 | 0,35 | 0 | 0,64 | 0 | (4) |
| 0,2500 | 1,7500 | 0 | 0 | 0 | 0,99 | 0 | |
| 0,2420 | 1,7580 | 0 | 0 | 0 | 0,76 | 0,23 | |
| 0,2400 | 1,7600 | 0 | 0 | 0 | 0,18 | 0,82 | |
| 0,2300 | 1,7700 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,99 | |

Tabela 2. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu multiplikatywnej metody agregacji kryteriów lokalnych

| **Ws $r_p$** | **Ws $r_w$** | **$x_1$** | **$x_2$** | **$x_3$** | **$x_4$** | **$x_5$** | **Metoda klasyczna patrz Rys.4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | (6) |
| 1,999 | 0,001 | 0 | 0,875 | 0 | 0,044 | 0,07 | |
| 1,998 | 0,002 | 0 | 0,67 | 0 | 0,11 | 0,21 | |
| 1,997 | 0,003 | 0 | 0,49 | 0 | 0,19 | 0,32 | |
| 1,996 | 0,004 | 0 | 0,163 | 0 | 0,05 | 0,79 | |
| 1,994 | 0,006 | 0 | 0,11 | 0 | 0,08 | 0,80 | |
| 1,993 | 0,007 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |

Tabela 3. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu metody maksymalnego pesymizmu agregacji kryteriów lokalnych

| **Ws $r_p$** | **Ws $r_w$** | **$x_1$** | **$x_2$** | **$x_3$** | **$x_4$** | **$x_5$** | **Metoda klasyczna patrz Rys.4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | (6) |
| 1,92 | 0,08 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | (6) |
| 1,9195 | 0,0805 | 0 | 0,725 | 0 | 0,101 | 0,17 | |
| 1,919 | 0,081 | 0 | 0,438 | 0 | 0,100 | 0,460 | |
| 1,918 | 0,082 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 1,91 | 0,09 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |

Przeanalizujmy otrzymane wyniki.

Wszystkie trzy przedstawione powyżej tabele zostały zbudowane w ten sam sposób. W pierwszych kolumnach tabel (1)-(3) znajdują się zmniejszające się współczynniki względnej ważności zysku, począwszy od 2 do 0. W kolumnach drugich odpowiadające współczynnikom względnej ważności zysku, współczynniki względnej ważności ryzyka, spełniające zasadę $(r_p + r_w)/2=1$. Zmniejszenie współczynnika względnej ważności zysku oznacza zwiększenie współczynnika ryzyka. W kolumnach 3- 7 umieszczone są wartości udziału poszczególnych rodzajów akcji w portfelu $X_1$-$X_5$, są to konkretne wartości liczbowe. Przy czym udział $x_i$ dotyczy akcji $C_i$ , $i=1,\ldots,5$. Rodzaje poszczególnych akcji umieszczone są (patrząc od lewej do prawej) od tych z największym oczekiwanym średnim zyskiem ( i największym ryzykiem ) do tych z najmniejszym zyskiem (i najmniejszym ryzykiem). Analizując powyższe wyniki wyraźnie widać, że wraz ze zwiększeniem współczynnika względnej ważności ryzyka do portfela akcji zostają wybierane akcje z mniejszym oczekiwanym średnim zyskiem. W ostatnich kolumnach o nagłówku „ Metoda klasyczna” umieszczone zostały numery metod jednokryterialnych (patrz rysunek 4, [4]), których rezultaty zostały osiągnięte jako wyniki szczegółowe, dla różnych układów rang przy podejściach wielokryterialnych.

Przyjrzyjmy się uważniej wynikom przedstawionym w tabeli 1, uzyskanym w przypadku gdy, kryterium globalne zbudowane zostało na podstawie addytywnej metody agregacji kryteriów lokalnych. Dla współczynnika względnej ważności zysku zmieniającego się w zakresie od 2 do 0,5972 do portfela akcji wybierany jest pierwszy rodzaj akcji $C_1$, co odpowiada rezultatom jednokryterialnej metody „Modality model" [4], (patrz Rys 4, tabela 1). Dla współczynnika względnej ważności zysku równego 0,5960 do portfela akcji wybrany został tylko $C_2$- rodzaj akcji. Sytuacja ta odpowiada wynikowi uzyskanemu przy zastosowaniu modelu fraktalnego [4] (patrz Rys 4, tabela 1). Dla współczynników względnej ważności zysku zmieniających się w zakresie od 0,5971 do 0,5968 do portfela akcji wybierane są akcje typu $C_1$ i $C_2$. Wraz ze zmianą układów rang zmieniają się proporcje wziętych do portfela akcji. Wraz ze zmniejszaniem współczynnika względnej ważności zysku wybierana jest większa ilość akcji typu $C_2$. Jest to jak najbardziej zrozumiałe i oczywiste. Akcje typu $C_2$ charakteryzują się mniejszym oczekiwanym średnim zyskiem, a więc przy zmniejszaniu współczynnika względnej ważności zysku wybierana jest większa ilość tych właśnie akcji. Podobną sytuację obserwujemy dla współczynników względnej ważności zysku zmieniających się od 0,262 do 0,26. W tym wypadku do portfela akcji wybrane zostały dwa typy akcji: akcje typu $C_2$ i akcje typu $C_4$. Tak jak poprzednio wraz ze zmianą układów współczynników względnych ważności kryteriów zmieniają się proporcje wybranych do portfela akcji. Co ciekawe, wynik uzyskany dla współczynnika względnej ważności zysku równego 0.26, odpowiada rezultatowi uzyskanemu przy zastosowaniu modelu minimalizacji szerokości [4] (patrz Rys 4, tabela 1).

Łatwo zauważyć, że akcje typu $C_3$ nigdy nie są brane do portfela akcji. Dzieje się tak ze względu na to że przegrywają one w rywalizacji z akcjami typu $C_2$- które to charakteryzują się większym średnim oczekiwanym zyskiem, a przy tym charakteryzują się taka samą niepewnością co akcje typu $C_3$ . Ta oczywista prawidłowość wyklucza osiągnięcie rezultatów osiągniętych przy zastosowaniu niektórych metod jednokryterialnych (patrz Rys.4).

W tabeli 2 przedstawione zostały wyniki uzyskane przy zastosowaniu multiplikatywnej metody agregacji kryteriów lokalnych. Porównując te wyniki z tymi uzyskanymi w poprzednim przypadku wyraźnie widać, że różnią się od siebie. Jednak po dokładniejszej analizie zauważyć można, że ilości branych do portfela akcji, wraz ze zmianą układów współczynników względnej ważności kryteriów zmieniają się analogicznie jak w poprzednim przypadku. Czyli wraz ze wzrostem współczynnika względnej ważności kryterium ryzyka do portfela akcji wybierane są akcje, charakteryzujące się mniejszym ryzykiem. Dla współczynników względnej ważności zysku zmieniających się w zakresie od 1,999 do 1,994 do portfela akcji wybierane są akcje typu $C_2$, $C_4$ *i* $C_5$, wraz ze zmniejszeniem się współczynnika względnej ważności zysku zmieniają się proporcje branych do portfela papierów wartościowych. Podobnie też jak poprzednio nigdy nie wybrane zostały akcje typu $C_3$, z tych samych przyczyn jak w przypadku poprzednim. Należy zauważyć, że przy zastosowaniu tej metody agregacji kryteriów lokalnych, również osiągnięty został wynik jednej z metod jednokryterialnych (patrz tabela 2, rysunek 4). Analizując przedstawione w tabeli 2 wyniki widać wyraźnie, że różnią się one od wyników uzyskanych w skutek zastosowania kryterium addytywnego.

Przy zmianie metody agregacji  zmieniają się wyniki, wskutek czego wybór właściwej metody agregacji jest zagadnieniem priorytetowym.

W tabeli 3 przedstawione zostały wyniki uzyskane przy zastosowaniu metody maksymalnego pesymizmu agregacji kryteriów lokalnych. Porównując wyniki umieszczone w tabelach 2 i 3 widać, że w tym przypadku wyniki układają się podobnie jak w przypadku zastosowania multiplikatywnego kryterium agregacji kryteriów lokalnych. Podobnie jak w poprzednich przypadkach, przy zastosowaniu tej metody agregacji kryteriów lokalnych, osiągnięty został wynik jednej z metod jednokryterialnych (patrz tabela 3, Rys 4).

Uogólniając można stwierdzić, że zastosowanie metody dwukryterialnej w celu rozwiązania problemu optymalizacji portfela akcji, jest jak najbardziej słusznym podejściem, co potwierdzają osiągnięte wyniki. Istotnym jest fakt, że bez względu na zastosowaną metodę agregacji kryteriów lokalnych, zostały osiągnięte jako przypadki szczegółowe rezultaty najbardziej renomowanych metod jednokryterialnych. Wybór właściwej metody agregacji kryteriów lokalnych nie jest zagadnieniem prostym. Jak wynika z powyższych rozważań, odmienne warianty agregacji kryteriów powodują bardzo różne końcowe rezultaty, co świadczy o dominującej ważności etapu formułowania kryterium globalnego. Biorąc jednak pod uwagę ilość osiągniętych rezultatów metod jednokryterialnych, najlepiej wypadła metoda addytywnej agregacji kryteriów lokalnych, spośród jej wyników zostały osiągnięte trzy rezultaty metod jednokryterialnych (patrz tabela 1, Rys.4). Przy zastosowaniu dwóch pozostałych metod agregacji osiągnięty został tylko jeden rezultat metod jednokryterialnych (patrz tabela 2 i 3, Rys.4). Istotnym jest fakt, że przy zastosowaniu każdej z metod agregacji do portfela akcji nie wybierane są akcje, które charakteryzują się takim samym zyskiem, co inne papiery wartościowe, lecz mają wyższe ryzyko.

**5. Uwagi końcowe**

Proponowane podejście do wielokryterialnej, rozmytej, nieliniowej optymalizacji portfela papierów wartościowych zrealizowane zostało za pomocą oryginalnej metody numerycznej opartej na dwu - kryterialnym podejściu do porównywania przedziałów ostrych i rozmytych. Wprowadzone operacje matematyczne realizowane są za pomocą programowania obiektowego. Opracowana metoda sprawdzona została na przykładzie optymalizacji portfela papierów wartościowych składającego się z pięciu akcji przy zastosowaniu trzech różnych metod agregacji kryteriów lokalnych. Udowodniono ze podejście wielokryterialne  do optymalizacji portfela (w każdym z przypadków agregacji) jest uogólnieniem najbardziej renomowanych metod optymalizacji portfela. Podejście wielokryterialne nie tylko uogólnia podejście klasyczne ale wyraźnie lepiej odzwierciedla naturę problemu optymalizacji portfela papierów wartościowych i co najważniejsze jest to podejście prawidłowe, bowiem nie uwzględnia w portfelu tych papierów wartościowych, które charakteryzują się takim samym zyskiem, co inne papiery wartościowe, lecz mają wyższe ryzyko.

Referencje:

[1] Endre Pap, Zita Bosnjak, Sasa Bosnjak, *Application of fuzzy sets with diferent t-norms in the interpretation of portfolio matrices in strategic management*, Fuzzy Sets and Systems 114 (2000) 123.
[2] Hideo Tanaka, Peijun Guo, I. Burhan Turksen, *Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions,* Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) 387.
[3] H.M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efcient Diversifcation of Investments,* Wiley, New York, 1959.

[4] Masahiro Inuiguchi, Jaroslav Ramik, *Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem,* Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) 3
[5] Masahiro Inuiguchi , Tetsuzo Tanino, *Portfolio selection under independent possibilistic information,* Fuzzy Sets and Systems 115 (2000) 83
[6] C. Zopounidis, *Multicriteria decision aid in financial management*, European Journal of Operational Research 119 (1999) 404-415
[7] Jacquillat B., *Les modèles dÕévaluation et de sélection des valeurs mobilières: Panorama des recherches américaines,* Analyse Financière (1972), 11, 4e trim, p. 68-88.
[8] Colson, G., Zeleny, M., 1979, *Uncertain prospects ranking and portfolio analysis under the condition of partial information,* Mathematical Systems in Economics 44, Verlag Anton Hain, Maisenheim.
[9] Zeleny, M., 1977, *Multidimensional measure of risk: The prospect ranking vector. in: Zionts, S. (Ed.), Multiple Criteria Problem Solving,* Springer, Heidelberg, pp. 529-548.
[10] Zeleny, M., 1982, *Multiple Criteria Decision Making,* Mc-Graw-Hill, New York.
[11] T. Lorenzana, N. Márquez, S. Sardà, *An aproach to the problem of portfolio selection,* Fuzzy Economic Review Number 1, Volume I. May 1996 62-74
[12] Peijun Guo, Hideo Tanaka, *Possibilistic data analysis and its aplication to portfolio selection problems,* Fuzzy Economic Review Number 2, Volume III. November 1998 1-11
[13] Francesc J. Ortí, José Sáez, Antonio Terceño, *On the treatment of uncertainty in portfolio selection,* Fuzzy Economic Review Number 2, Volume VII. November 2002 22-31
[14] Kaufmann A., Gupta M, *Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1985 – 349 p.
[15] Fortemps, M. Roubens, *Ranking and defuzzification methods based on area compensation,*
Fuzzy Sets and Systems (1996) 319-330.
[16] P. Sewastianow, P. Róg, K. Karczewski, *A Probabilistic Method for Ordering Group of Intervals*,
Informatyka teoretyczna i stosowana/Computer Science. P.Cz., Rocznik 2, 2 (2002), s. 45-53
[17] Paweł Sewastianow, Paweł Róg, *A Probability Approach to Fuzzy and Crisp Intervals Ordering,*
Task Quarterly 7 No 1 (2003), 147-156, Politechnika Częstochowska
[18] Linsmeier T. J., Pearson N. D., *Risk measurement : an introduction to value at risk,* Champaign, IL: University of Illinois, 1996
[19] L.A. Zadech, Fuzzy sets, Inform. And Control 8 (1965) 338-353
[20]Sewastianiow P.,Róg P., *Fuzzy Optimization Using Direct Crisp and Fuzzy Interval comparison"* Institute of Math. & Comp. Sci., Technical University of Częstochowa, st. 73,