Dwukryterialna optymalizacja portfela papierów wartościowych w warunkach niepewności

Paweł Sewastianow, Monika Jończyk
e-mail, sevast@icis.pcz.czest.pl , monika@zapr.com.pl
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, Politechnika Częstochowska
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa

Streszczenie: Praca poświęcona jest zagadnieniu optymalizacji portfela akcji w warunkach niepewności. Przedstawiony problem został sformułowany jako zagadnienie programowania nieliniowego rozmytego i dwukryterialnego. W prezentowanej metodzie, w celu uzyskania konstruktywnej metody porównywania liczb rozmytych zaproponowano potraktowanie przedziałów i liczb rozmytych w sensie probabilistycznym. W celu rozwiązania problemu opracowana została metoda oparta na agregowaniu lokalnych kryteriów maksymalizacji rentowności portfela i minimalizacji ryzyka. W problemie optymalizacji portfela papierów wartościowych zastosowane i porównane zostały trzy najczęściej używane metody agregacji kryteriów lokalnych. Proponowana metoda dwukryterialna może być w pewnym sensie rozpatrywana jako uogólnienie istniejących metod jednokryterialnych, co zostało zilustrowane konkretnym przykładem. Udowodniono, że wielokryterialne podejście do optymalizacji portfela (w każdym z przypadków agregacji) jest uogólnieniem najbardziej renomowanych metod optymalizacji portfela. Podejście wielokryterialne nie tylko uogólnia podejścia klasyczne, ale wyraźnie lepiej odzwierciedla naturę rynku finansowego i problemu optymalizacji portfela papierów wartościowych. Najważniejszy jednak jest fakt, że jest to podejście prawidłowe, bowiem nie uwzględnia w portfelu tych papierów wartościowych, które charakteryzują się takim samym oczekiwanym zyskiem, jakim charakteryzują się inne papiery wartościowe, jednakże obarczone wyższym ryzykiem.
Słowa kluczowe: Selekcja portfela; Programowanie rozmyte nieliniowe; Zagadnienie optymalizacji dwukryterialnej; Porównywanie przedziałów, liczb rozmytych

1. Wstęp.

Jednym z ważniejszych zagadnień w teorii i praktyce działalności finansowych jest optymalizacja portfela papierów wartościowych. W podejściu klasycznym, zapoczątkowanym przez Markowitza [3], zagadnienie to było rozpatrywane w ujęciu jednokryterialnym. Zakładano, że inwestor ma na celu minimalizację np. ryzyka przy gwarantowanym poziomie dochodu lub przeciwnie maksymalizację dochodu przy ograniczonym poziomie ryzyka. Jest to poważne uproszczenie realnej sytuacji rynkowej, w której występują co najmniej dwa kryteria jednocześnie - chęć maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka. Dodatkowym uproszczeniem w podejściu klasycznym było rozpatrywanie parametrów niepewnych przedstawionych w postaci gęstości zmiennych losowych, które jak zostało udowodnione w [14], najczęściej nie zdarzają się w praktyce. Wymienione problemy, zostały w dużej mierze, rozwiązane wraz z pojawieniem się teorii zbiorów rozmytych [15]. Dziś można przytoczyć cały szereg prac z tej dziedziny [1]-[5], [7], [10]-[12]. Główną zaletą podejścia rozmytego jest możliwość zmiany gęstości prawdopodobieństwa parametrów finansowych przez odpowiednie dobranie funkcji przynależności zbiorom rozmytym, co pozwala na uwzględnienie dowolnej struktury danych, otrzymanych w trakcie badań statystycznych rynku papierów wartościowych. Jednak prawie wszystkie wymienione powyżej prace oprócz [12], redukują sformułowane w sposób rozmyty zagadnienie do szeregu związanych między sobą problemów programowania liniowego. Dodatkowo naśladują w pewnym sensie ideologię klasycznego podejścia Markowitza, ponieważ wyodrębniają tylko jedno kryterium, które trzeba maksymalizować lub minimalizować w zależności od sytuacji. Wynika z tego, że istniejące podejścia do problemu portfelowego w ramach teorii zbiorów rozmytych są w gruncie rzeczy jednokryterialne.

Jednak wielokryterialność problemu portfelowego odnotowana została jeszcze na poziome merytorycznym przez specjalistów z dziedziny finansów [6], [7], [8], [9].

W przedstawianym artykule zagadnienie optymalizacji portfela sformułowane zostało w formie zagadnienia wielokryterialnego, nieliniowego, rozmytego programowania. Uwzględniono rywalizujące lokalne kryteria maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka. Zostały zastosowane i porównane trzy metody agregacji kryteriów lokalnych. W trakcie realizacji algorytmu numerycznego, realizującego proponowaną metodę, używane jest oryginalne probabilistyczne podejście do porównywania liczb rozmytych.

2. Narzędzia matematyczne.

Ponieważ w ramach proponowanego podejścia bezpośrednio używane są operacje na liczbach rozmytych, poniżej przedstawione zostały podstawowe pojęcia z teorii zbiorów rozmytych.

Zbiór rozmyty *A* można zdefiniować jako:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \quad \mu_A(x) \in [0,1]\},$$

gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ jest funkcją przynależności elementów *X* do zbioru *A*.

Funkcja przynależności stanowi uogólnienie funkcji charakterystycznej, zbiór rozmyty zaś – uogólnienie zbioru zwykłego.

Najbardziej konstruktywnym podejściem do implementacji arytmetyki rozmytych przedziałów jest podejście, oparte na reprezentacji przedziału rozmytego za pomocą α-przekrojów.

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_\alpha,$$

gdzie A_α jest przedziałem $\{x: \mu_A(x) \geq \alpha\}$, αA_α jest przedziałem rozmytym $\{(x, \alpha): x \in A_\alpha\}$.

Niech *A* i *B* będą rozmytymi przedziałami. Zostało udowodnione, że wszystkie operacje na tych rozmytych przedziałach mogą zostać sprowadzone do operacji na przedziałach ostrych, odpowiadających α- przekrojom:

$$(A @ B)_\alpha = A_\alpha @ B_\alpha$$

Z tego powodu problemy arytmetyki przedziałów rozmytych można zredukować do problemu arytmetyki ostrych przedziałów.

W przypadku prezentacji liczby rozmytej w postaci α-przekrojów, która opiera się o liczby przedziałowe, należy przedstawić podstawowe pojęcia, dotyczące arytmetyki przedziałowej.

Istnieje kilka definicji arytmetyki przedziałowej, ale udowodniono, że przy zastosowaniu ich w praktycznych aplikacjach tak zwana forma „naiwna" jest formą najlepszą. Według tego, jeśli $A = [a_1, a_2]$ i $B = [b_1, b_2]$ są przedziałami, wtedy

$$Z = A@B = \{ z = x@y, \ \forall x \in A, \forall y \in B \}.$$

Bezpośrednią konsekwencją powyżej definicji są następujące wyrażenia:

$A+B=[a_1+b_1, b_2+b_2],$ $\qquad$ $A-B=[a_1-b_2, a_2-b_1],$

$A \cdot B=[min(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1), max(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1)],$

$A/B=[a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]$

Oczywiście istnieje wiele wewnętrznych problemów stosowanej analizy przedziałowej, np. dzielenie przez przedział zawierający zero, ale generalnie może być ona rozważana jako dobre narzędzie matematyczne dla modelowania i podejmowania decyzji w warunkach niepewności.

Ponieważ założone zostało, że liczba rozmyta reprezentowana będzie przez zbiór jej α-przekrojów, które są w gruncie rzeczy, zborem zwykłych przedziałów, można więc użyć arytmetyki przedziałowej, by rozwiązać problem porównywania przedziałów rozmytych.

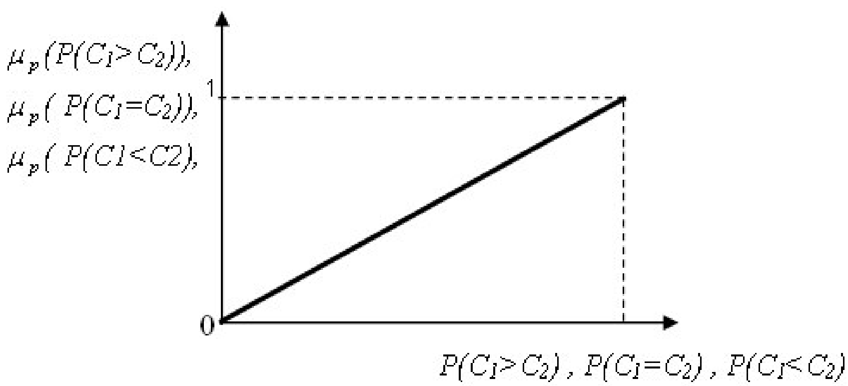
Oczywistym jest, że w ramach opisanego powyżej podejścia problem porównywania przedziałów rozmytych redukuje się do porównywania przedziałów ostrych. Rzeczywiście, jeżeli chcemy maksymalizować rozmyto - przedziałowy dochód sumaryczny portfela inwestycji, jednocześnie chcielibyśmy zmniejszyć ryzyko finansowe, przedstawione bezpośrednio przez szerokości przedziałów w punkcie optimum, tzn. że w trakcie realizacji algorytmu numerycznego na każdym jego kroku chcielibyśmy zwiększyć prawdopodobieństwo wzrostu otrzymanej przedziałowej/rozmyto przedziałowej wartości dochodu przy jednoczesnym zmniejszeniu szerokości reprezentującego ją przedziału. Podejście takie zostało zaproponowane w [16]. Podejście opisane w [16], zostało z powodzeniem, zastosowane przy optymalizacji portfela papierów wartościowych w warunkach niepewności [17]. Przy zastosowaniu opracowanych w [16] kryteriów lokalnych, kryterium (prawdopodobieństwa) odpowiadające za maksymalizacje rentowności portfela w praktyce zawsze waha się w przedziale [0-1], natomiast kryterium minimalizacji szerokości, czyli ryzyka, (gdy szerokości porównywanych liczb rozmytych są do siebie zbliżone) zawsze jest albo równe 0, albo równie mało (w najlepszej sytuacji waha się od 0-0,3). W skutek, czego przy zastosowaniu kryteriów względnej ważności kryteriów lokalnych, uzyskane wyniki nie układają się intuicyjnie. Przy zastosowaniu współczynników względnej ważności kryteriów lokalnych, odpowiadających za zysk $r_p=1$ i ryzyko $r_w=1$, oczekujemy że ryzyko i zysk będą brane pod uwagę w tym samym stopniu. W praktyce jednak, ze względu na nierównoważność kryteriów lokalnych, uzyskane wyniki odbiegają od oczekiwań. Dopiero przy randze kryterium ryzyka $r_w=1,4$ ryzyko w ogóle jest brane pod uwagę (tabela 1 w [17]).

Z tego też względu, poniżej proponowane jest nowe dwu-kryterialne podejście dla porównywania przedziałów ostrych i rozmytych w zagadnieniach optymalizacji w warunkach niepewności (ryzyka). W stosunku do podejścia, przedstawionego w [16], przedstawione poniżej podejście wprowadza nowe kryterium lokalne odpowiadające za ryzyko.

Pierwsze kryterium lokalne pozostaje nie zmienione: jest wyrażone przez funkcję przydatności (dla problemu wyboru większego przedziału), przedstawioną na rys. 1. Zgodnie z tym kryterium, im większe jest prawdopodobieństwo $C_1>C_2$, tym większa wartość funkcji kryterialnej $\mu_p(P(C_1>C_2))$. Analogicznie dla przedziału C_2, im większe jest prawdopodobieństwo $C_2>C_1$, tym większa wartość funkcji kryterialnej $\mu_p(P(C_2>C_1))$.

W ogólnym przypadku można zapisać te kryteria jako:

$$\mu_p(P(C_1>C_2)),\ \mu_p(P(C_1=C_2)),\ \mu_p(P(C_1<C_2)), \tag{1}$$



Rys. 1. Kryterium użyteczności dla prawdopodobieństwa $P(C_1>C_2)$, $P(C_1=C_2)$, $P(C_1<C_2)$

Drugie kryterium lokalne może zostać wyrażone jako:

$$\mu_w(x_{C_1})=1-x_{C_1},\quad \mu_w(x_{C_2})=1-x_{C_2} \tag{2}$$

gdzie: $$x_{C_1}=\frac{W_{C_1}-W_{Min}}{W_{Sr}}$$

$$x_{C_2}=\frac{W_{C_2}-W_{Min}}{W_{Sr}}$$

gdzie:

W_{C_1} -szerokość przedziału C_1

$$W_{Min} = Min(W_{C_1}, W_{C_2}) \qquad (3)$$

$$W_{Sr} = Max(W_{C_1}, W_{C_2}) - W_{Min} \qquad (4)$$

Jasnym jest, że wartość kryterium jest tym większa, im mniejsza szerokość ocenianego przedziału, względem szerokości przedziału, z którym go porównujmy. W praktyce, dla przedziału szerszego wartość kryterium wynosi *0,* a dla węższego *1*. Jeżeli np. porównujemy przedziały C_1 i C_2, i okazuje się, że przedział C_2 jest szerszy, wówczas w W_{C_2} w mianowniku i liczniku występuje ta sama wartość, co daje wynik równy 1, dlatego $\mu_w(x_{C_2}) = 1 - 1 = 0$, natomiast w przeciwnym wypadku $\mu_w(x_{C_1}) = 0$.

W przypadku optymalizacji portfela papierów wartościowych w warunkach niepewności, składającego się z *n* papierów, gdy oczekiwany zysk z poszczególnych rodzajów akcji C_i wyrażony jest w postaci liczb rozmytych, w drugim kryterium określającym szerokość ocenianych przedziałów, należy nieznacznie zmodyfikować wyrażenia (3) i (4):

$$W_{Min} = Min(W_{C_i}) \quad \textit{gdzie: } i=1...n$$

$$W_{Sr} = Max(W_{C_i}) - W_{Min} \quad \textit{gdzie: } i=1..n$$

Modyfikacja ta sprawia, że wartość drugiego kryterium nie będzie wynosiła 0 lub 1, lecz będzie się wahała w przedziale od 0 do 1 dzięki czemu kryterium to będzie równoważne kryterium pierwszemu, którego wartość również waha się w przedziale od 0 do1.

Sformułowane zostały dwa kryteria lokalne, w praktyce zawsze zachowujące się kontrowersyjnie, ponieważ otrzymanie większego zysku bardziej prawdopodobne jest przy odpowiednim zwiększeniu ryzyka. Dlatego też wprowadzone zostały współczynniki względnej ważności kryteriów r_p, r_w, charakteryzujące odpowiednio preferencje dycydenta, co do rentowności i ryzyka. Współczynniki te muszą spełniać ogólnie przyjęte ograniczenie

$(r_p + r_w)/2 = 1$.

Mając określone dla problemu optymalnej selekcji portfela lokalne kryteria prawdopodobieństwa i ryzyka oraz współczynniki ich względnej ważności, można skonstruować globalne kryteria, umożliwiające porównanie przedziałów, za pomocą 3 sposobów agregowania kryteriów lokalnych : addytywnego (5-6) , multiplikatywnego (7-8) oraz maksymalnego pesymizmu (9-10), uwzględniając rangi r_p, r_w podane przez eksperta.

Kryteria globalne, skonstruowane za pomocą addytywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych :

$$D_A(A,B) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p(P(A > B)) + r_w \mu_w(x_A)), \qquad (5)$$

$$D_B(A,B) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p(P(B > A)) + r_w \mu_w(x_B)), \qquad (6)$$

Kryteria globalne, skonstruowane za pomocą multiplikatywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych :

$$D_A(A,B) = \mu_p(P(A > B))^{r_p} \cdot (\mu_w(x_A))^{r_w}, \qquad (7)$$

$$D_B(A,B) = \mu_p(P(B > A))^{r_p} \cdot (\mu_w(x_B))^{r_w}, \qquad (8)$$

Kryteria globalne, skonstruowane za pomocą sposobu maksymalnego pesymizmu agregacji kryteriów lokalnych :

$$D_A(A,B) = \min\{(\mu_p(P(A > B)))^{r_p}, (\mu_w(x_A))^{r_w}\}, \qquad (9)$$

$$D_B(A,B) = \min\{(\mu_p(P(B > A)))^{r_p}, (\mu_w(x_B))^{r_w}\}, \qquad (10)$$

Przedstawione powyżej kryteria globalne wymagają kilku słów komentarza.

Podczas porównywania dwóch przedziałów *A* i *B*, należy wyliczyć wartość kryterium D_A oraz wartość kryterium D_B , które w zależności od wybranego sposobu agregacji przyjmują postać (5), (6) lub (7), (8) lub (9), (10), a następnie porównać te dwa kryteria. Jeżeli kryterium $D_A > D_B$, wówczas przedział A jest większy od przedziału B i odwrotnie: jeśli $D_A < D_B$, wówczas przedział A jest mniejszy od przedziału B.

3. Metoda rozmytej optymalizacji portfela papierów wartościowych

Zadanie sformułowane jest jako zadanie optymalizacji portfela, uogólniające podejście klasyczne.

Rozmyty dochód sumaryczny portfela:

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \hat{C}_j \tag{11}$$

gdzie: $\hat{F}$ – rozmyto- przedziałowy dochód portfela ; x_j – udział akcji j-tej w portfelu (liczba rzeczywista);
$\hat{C}_j$ – rozmyto- przedziałowa stopa zysku z j-tej akcji .

Jednocześnie użyte zostało standardowe ograniczenie :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{12}$$

Oczywiście problem polega na maksymalizacji dochodu $\hat{F}$ w sensie opisanego w rozdziale 2 podejścia probabilistycznego przy jednoczesnym wypełnieniu kryterium minimalizacji ryzyka , czyli minimalizacji szerokości $\hat{F}$. Dlatego w zgodzie z wynikami z rozdziału 2, metoda numeryczna dwu kryterialnej maksymalizacji $\hat{F}$ z uwzględnieniem wzorów (5)-(6), lub (7)-(8), lub (9)-(10) (w zależności od zastosowanego sposobu agregacji) może być przedstawiona jako stopniowe (krok po kroku) maksymalizowanie globalnego kryterium, które w przypadku,

- addytywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych ma postać :

$$D_{\hat{F}_k}(\hat{F}_k, \hat{F}_{k+1}) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p (P(\hat{F}_k > \hat{F}_{k+1})) + r_w \mu_w (x_{\hat{F}_k}))$$

$$D_{\hat{F}_{k+1}}(\hat{F}_k, \hat{F}_{k+1}) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p (P(\hat{F}_{k+1} > \hat{F}_k)) + r_w \mu_w (x_{\hat{F}_{k+1}})) \tag{13}$$

- multiplikatywnego sposobu agregacji kryteriów lokalnych ma postać :

$$D_{\hat{F}_k}(\hat{F}_k, \hat{F}_{k+1}) = \mu_p (P(\hat{F}_k > \hat{F}_{k+1}))^{r_p} \cdot (\mu_w (x_{\hat{F}_k}))^{r_w}$$

$$D_{\hat{F}_{k+1}}(\hat{F}_k, \hat{F}_{k+1}) = \mu_p (P(\hat{F}_{k+1} > \hat{F}_k))^{r_p} \cdot (\mu_w (x_{\hat{F}_{k+1}}))^{r_w} \tag{14}$$

- maksymalnego pesymizmu sposobu agregacji kryteriów lokalnych ma postać :

$$D_{\hat{F}_k}(\hat{F}_k, \hat{F}_{k+1}) = \min\{(\mu_p (P(\hat{F}_k > \hat{F}_{k+1})))^{r_p}, (\mu_w (x_{\hat{F}_k}))^{r_w}\}$$

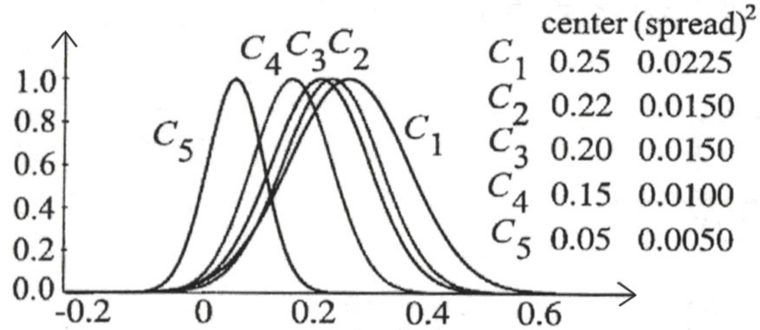
$$D_{\hat{F}_{k+1}}(\hat{F}_k, \hat{F}_{k+1}) = \min\{(\mu_p (P(\hat{F}_{k+1} > \hat{F}_k)))^{r_p}, (\mu_w (x_{\hat{F}_{k+1}}))^{r_w}\} \tag{15}$$

gdzie: *k*- numer poszczególnych kroków przejść algorytmu, $\hat{F}_k$- dochód rozmyto- przedziałowy (patrz wyrażenie (11)) w kroku *k*, $\mu_w(x_{\hat{F}_k})=1-x_{\hat{F}_k}$ - kryterium lokalne, odpowiadające za ryzyko, $x_{\hat{F}_k}=\dfrac{W_{\hat{F}_k}-W_{Min}}{W_{Sr}}$, $W_{\hat{F}_k}$ - szerokość przedziału funkcji *F* w kroku *k*, $W_{\hat{F}_{k+1}}$ -szerokość przedziału funkcji *F* w kroku *k+1*, $\mu_p(P(\hat{F}_k > \hat{F}_{k+1}))$ - kryterium lokalne, odpowiadające za zysk.

W celu realizacji algorytmu numerycznego opracowane zostało rozmyto - przedziałowe rozszerzenie algorytmu bezpośredniego poszukiwania losowego [13]. Do tego algorytmu została wprowadzona dodatkowa metoda losowego wyboru wektora $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, umożliwiająca spełnienie ograniczenia (12). Wszystkie operacje rozmyto-przedziałowe, w tym operacja porównywania przedziałów rozmytych opracowane zostały za pomocą programowania obiektowego. W celach porównania dostępnych metod agregacji kryteriów lokalnych zostały opracowane trzy wersje programu, dla każdego rodzaju agregacji.

4.Przykład dwu-kryterialnej, rozmytej optymalizacji portfela pięciu akcji.

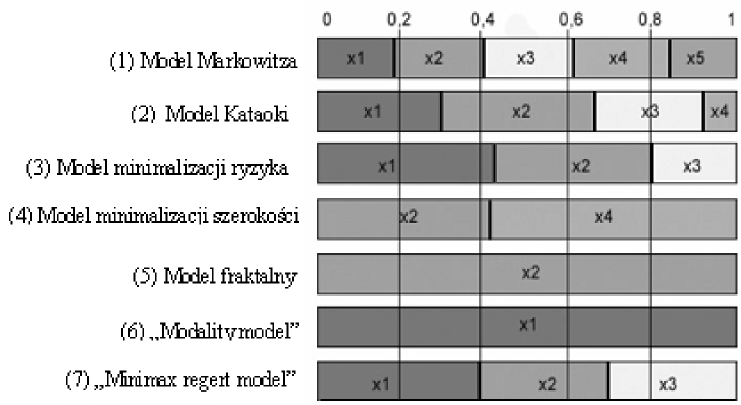
W celu porównywania rezultatów otrzymanych za pomocą proponowanego podejścia, z wynikami innych autorów użyty został przykład, dokładnie przedstawiony w [4]. W tej pracy rozpatrywano przykład portfela, składającego się z pięciu rodzajów papierów wartościowych, przewidywane zyski opisane zostały funkcjami przynależności, podobnymi do normalnych rozkładów Gaussa (patrz rys. 2).



Rys. 2 Rozmyto-przedziałowe wartości oczekiwanego zysku z akcji C_1,C_2,C_3,C_4,C_5, [4]

Patrząc na rys.3 bez przeprowadzania dodatkowych wyliczeń, można wywnioskować, że wystąpienie w jakimkolwiek portfelu jednocześnie akcji typu C_2 i akcji typu C_3 jest nie możliwe ze względu na to, że przy jednakowym ryzyku akcje typu C_2 charakteryzują się większym oczekiwanym zyskiem. Stąd wynika też, że jeżeli portfel nie zawiera akcji typu C_2, nie powinien też zawierać akcji typu C_3. Jak widać z rys. 3 większość podejść klasycznych jednokryterialnych nie uwzględnia tego oczywistego faktu. W sytuacjach rzeczywistych tego rodzaju nieprawidłowości podejść klasycznych są oczywiście tuszowane przez istnienie dużej ilości akcji.

Zgodnie z metodologią, opisaną w rozdziale 2, przedstawione na rys.2 funkcje przynależności zostały przekształcone w odpowiednie zbiory α-przekrojów, po czym zastosowano procedurę optymalizacji, opisaną w rozdziale 2. W tabelach 1-3 przedstawione zostały wyniki, otrzymane przy zastosowaniu różnych metod agregacji kryteriów lokalnych, dla różnych współczynników względnej ważności kryteriów maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka . Należy zaznaczyć, że w trakcie zmiany wartości tych współczynników otrzymano (jako przypadki szczegółowe) rezultaty, przedstawione w pracy [4], wynikające z najbardziej renomowanych jednokryterialnych metod : minimalizacji rozpiętości, fraktalnych, „Modality model”.



Rys 3. Wyniki, uzyskane przy siedmiu różnych podejściach jednokryterialnych (klasycznych) [4]

Tabela 1. Wyniki, uzyskane przy zastosowaniu addytywnej metody agregacji kryteriów lokalnych

r_p	r_w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Metoda klasyczna patrz rys.3
2	0	1	0	0	0	0	(6)
1.9	0,1	1	0	0	0	0	(6)
1.8	0.2	1	0	0	0	0	(6)
1.7	0.3	1	0	0	0	0	(6)
1.6	0.4	1	0	0	0	0	(6)
1.5	0.5	1	0	0	0	0	(6)
1.4	0.6	1	0	0	0	0	(6)
1.3	0.7	1	0	0	0	0	(6)
1.2	0.8	1	0	0	0	0	(6)
1.1	0.9	1	0	0	0	0	(6)
1.0	1.0	1	0	0	0	0	(6)
0.9	1.1	1	0	0	0	0	(6)
0.85	1.15	0.55	0.45	0	0	0	
0.8	1.2	0.07	0.93	0	0	0	
0.7	1.3	0	1	0	0	0	(5)
0.6	1.4	0	1	0	0	0	(5)
0.5	1.5	0	1	0	0	0	(5)
0.4	1.6	0	1	0	0	0	(5)
0.35	1.65	0	0.57	0	0.43	0	(4)
0.34	1.66	0	0.39	0	0.61	0	(4)
0.33	1.67	0	0.22	0	0.78	0	(4)
0.3	1.7	0	0	0	1	0	
0.25	1.75	0	0	0	0.43	0.57	
0.2	1.8	0	0	0	0	1	
0.1	1.9	0	0	0	0	1	
0	2.0	0	0	0	0	1	

Tabela 2. Wyniki, uzyskane przy zastosowaniu multiplikatywnej metody agregacji kryteriów lokalnych

r_p	r_w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Metoda klasyczna patrz rys.3
2	0	1	0	0	0	0	(6)
1.9	0.1	0.94	0.06	0	0	0	
1.8	0.2	0.87	0.13	0	0	0	
1.7	0.3	0.80	0.2	0	0	0	
1.6	0.4	0.73	0.27	0	0	0	
1.5	0.5	0.64	0.36	0	0	0	
1.4	0.6	0.54	0.46	0	0	0	
1.3	0.7	0.44	0.56	0	0	0	
1.2	0.8	0.32	0.68	0	0	0	
1.1	0.9	0.19	0.81	0	0	0	
1.0	1.0	0.04	0.96	0	0	0	
0.9	1.1	0	1	0	0	0	(5)
0.8	1.2	0	1	0	0	0	(5)
0.7	1.3	0	1	0	0	0	(5)
0.6	1.4	0	1	0	0	0	(5)
0.5	1.5	0	1	0	0	0	(5)
0.4	1.6	0	0.69	0	0.31	0	(4)
0.3	1.7	0	0.24	0	0.76	0	(4)
0.2	1.8	0	0	0	0.76	0.24	
0,1	1,9	0	0	0	0	1	
0	2,0	0	0	0	0	1	

Tabela 3. Wyniki, uzyskane przy zastosowaniu metody maksymalnego pesymizmu agregacji kryteriów lokalnych

r_p	r_w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Metoda klasyczna patrz rys.3
2	0	1	0	0	0	0	(6)
1.9	0.1	1	0	0	0	0	(6)
1.8	0.2	1	0	0	0	0	(6)
1.7	0.3	0.943	0.056	0	0	0	
1.6	0.4	0.819	0.180	0	0	0	
1.5	0.5	0.639	0.360	0	0	0	
1.4	0.6	0.428	0.571	0	0	0	
1.3	0.7	0.204	0.795	0	0	0	
1.21	0.79	0	1	0	0	0	(5)
1.2	0.8	0	0.979	0	0.019	0	(4)
1.1	0.9	0	0.817	0	0.106	0.076	

1.0	1.0	0	0.555	0	0.372	0.071	
0.9	1.1	0	0.404	0	0.457	0.137	
0.8	1.2	0	0.323	0	0.407	0.254	
0.7	1.3	0	0.310	0	0.293	0.394	
0.6	1.4	0	0.242	0	0.178	0.527	
0.5	1.5	0	0.208	0	0.190	0.600	
0.4	1.6	0	0.151	0	0.163	0.685	
0.3	1.7	0	0.007	0	0.298	0.693	
0.2	1.8	0	0	0	0.200	0.799	
0.1	1.9	0	0	0	0.097	0.902	
0	2.0	0	0	0	0	1	

Przeanalizujmy otrzymane wyniki.

Wszystkie trzy przedstawione powyżej tabele zostały zbudowane w ten sam sposób. W pierwszych kolumnach tabel znajdują się zmniejszające się współczynniki względnej ważności zysku, począwszy od 2 do 0. W kolumnach drugich odpowiadające współczynnikom względnej ważności zysku współczynniki względnej ważności ryzyka, spełniające zasadę $(r_p + r_w)/2=1$. Zmniejszenie współczynnika względnej ważności zysku oznacza zwiększenie współczynnika ryzyka. W kolumnach 3- 7 umieszczone są wartości udziału poszczególnych rodzajów akcji w portfelu X_1-X_5, są to konkretne wartości liczbowe. Przy czym udział x_i dotyczy akcji C_i , $i=1,\dots,5$. Rodzaje poszczególnych akcji umieszczone są (patrząc od lewej do prawej) od tych z największym oczekiwanym średnim zyskiem (i największym ryzykiem) do tych z najmniejszym zyskiem (i najmniejszym ryzykiem). Analizując powyższe wyniki wyraźnie widać, że wraz ze zwiększeniem współczynnika ważności ryzyka do portfela akcji zostają wybierane akcje z mniejszym oczekiwanym średnim zyskiem. W ostatnich kolumnach o nagłówku „ Metoda klasyczna" umieszczone zostały numery metod jednokryterialnych (patrz rys.3, [4]), których rezultaty zostały osiągnięte jako wyniki szczegółowe, dla różnych układów rang przy podejściach wielokryterialnych.

Przyjrzyjmy się uważniej wynikom przedstawionym w tabeli 1, uzyskanym w przypadku, gdy kryterium globalne zbudowane zostało na podstawie addytywnej metody agregacji kryteriów lokalnych. Dla współczynnika względnej ważności zysku zmieniającego się w zakresie od 2 do 0.9 do portfela akcji wybierany jest pierwszy rodzaj akcji C_1, co odpowiada rezultatom jednokryterialnej metody „Modality model" [4], (patrz rys.3, tabela 1). Dla współczynnika względnej ważności zysku zmieniającego się w zakresie od 0.7 do 0.4, do portfela akcji wybrany został tylko C_2- rodzaj akcji. Sytuacja ta odpowiada wynikowi, uzyskanemu przy zastosowaniu modelu fraktalnego [4] (patrz rys.3, tabela 1). Dla współczynników względnej ważności zysku, zmieniających się od 0.85 do 0.8, do portfela akcji wybierane są akcje typu C_1 i C_2. Wraz ze zmianą układów rang zmieniają się proporcje wziętych do portfela akcji. Wraz ze zmniejszaniem współczynnika względnej ważności zysku wybierana jest większa ilość akcji typu C_2. Jest to jak najbardziej zrozumiałe i oczywiste. Akcje typu C_2 charakteryzują się mniejszym oczekiwanym średnim zyskiem, a więc przy zmniejszaniu współczynnika względnej ważności zysku wybierana jest większa ilość tych właśnie akcji. Podobną sytuację obserwujemy dla współczynników względnej ważności zysku, zmieniających się od 0.35 do 0.33. W tym wypadku do portfela akcji wybrane zostały dwa typy akcji: akcje typu C_2 i akcje typu C_4. Tak jak poprzednio, wraz ze zmianą układów współczynników względnych ważności kryteriów zmieniają się proporcje wybranych do portfela akcji. Co ciekawe, wynik uzyskany dla współczynnika względnej ważności zysku, równego 0.34, odpowiada rezultatowi, uzyskanemu przy zastosowaniu modelu minimalizacji szerokości [4] (patrz rys.3, tabela 1).

Łatwo zauważyć, że akcje typu C_3 nigdy nie są brane do portfela akcji. Dzieje się tak ze względu na to, że przegrywają one w rywalizacji z akcjami typu C_2, które to charakteryzują się większym średnim oczekiwanym zyskiem, a przy tym charakteryzują się taką samą niepewnością co akcje typu C_3. Ta oczywista prawidłowość wyklucza osiągnięcie rezultatów osiągniętych przy zastosowaniu niektórych metod jednokryterialnych (patrz rys.3).

W tabeli 2 przedstawione zostały wyniki uzyskane przy zastosowaniu multiplikatywnej metody agregacji kryteriów lokalnych. Przy porównaniu tych wyników z tymi uzyskanymi w poprzednim przypadku wyraźnie widać, że różnią się od siebie. Jednak po dokładniejszej analizie zauważyć można, że ilości branych do portfela akcji wraz ze zmianą układów współczynników względnej ważności kryteriów zmieniają się analogicznie jak w poprzednim przypadku. Czyli wraz ze wzrostem współczynnika względnej ważności kryterium ryzyka do portfela akcji wybierane są akcje, charakteryzujące się mniejszym ryzykiem. Podobnie też jak poprzednio nigdy nie wybrane zostały akcje typu C_3, z tych samych przyczyn jak w przypadku poprzednim. Po dalszej analizie widać, że zastosowanie multiplikatywnego kryterium agregacji kryteriów lokalnych sprawia, że kryterium globalne jest bardziej „czułe” na jakiekolwiek zmiany współczynników względnej ważności kryteriów. Można więc powiedzieć, że osiągnięte w ten sposób wyniki dokładniej odzwierciedlają preferencje decydenta. Należy zauważyć, że przy zastosowaniu tej metody agregacji kryteriów lokalnych, również osiągnięte zostały wyniki metod jednokryterialnych (patrz tabela 2, rys.3).

W tabeli 3 przedstawione zostały wyniki, uzyskane przy zastosowaniu metody maksymalnego pesymizmu agregacji kryteriów lokalnych. Porównując wyniki umieszczone w tabelach 2 i 3 można zauważyć, że w tym przypadku wyniki układają się podobnie jak w przypadku zastosowania multiplikatywnego kryterium agregacji kryteriów lokalnych. W porównaniu z wynikami, przedstawionymi w tabeli 1 (addytywne kryterium agregacji kryteriów lokalnych), w tym przypadku kryterium globalne również jest bardziej czułe na zmiany współczynników względnej ważności kryteriów, wskutek czego wyniki lepiej odzwierciedlają preferencje decydenta. Interesujący jest fakt, że nawet w porównaniu z zastosowaniem kryterium multiplikatywnego, zastosowanie kryterium maksymalnego pesymizmu sprawia, że kryterium globalne jest bardziej „czułe" na zmiany rang. Podobnie jak w poprzednich przypadkach, przy zastosowaniu tej metody agregacji kryteriów lokalnych, osiągnięte zostały wyniki metod jednokryterialnych (patrz tabela 3, rys.3).

Uogólniając można stwierdzić, że zastosowanie metody dwukryterialnej w celu rozwiązania problemu optymalizacji portfela akcji jest jak najbardziej słusznym podejściem, co potwierdzają osiągnięte wyniki. Istotnym jest fakt, że bez względu na zastosowaną metodę agregacji kryteriów lokalnych, zostały osiągnięte jako przypadki szczegółowe rezultaty najbardziej renomowanych metod jednokryterialnych. Wybór właściwej metody agregacji kryteriów lokalnych nie jest zagadnieniem prostym. Jak wynika z powyższych rozważań, odmienne warianty agregacji kryteriów powodują bardzo różne końcowe rezultaty, co świadczy o dominującej ważności etapu formułowania kryterium globalnego. Jednak ze względu na to, że zastosowanie kryterium maksymalnego pesymizmu sprawia, że kryterium globalne jest najbardziej czułe na zmiany układów rang, stosowanie właśnie tego kryterium w problemie optymalizacji portfela akcji wydaje się być najbardziej wskazanym. Dzięki zastosowaniu równoważnych kryteriów lokalnych przy zastosowaniu każdego sposobu agregacji wyniki układają się bardziej intuicyjnie niż, w [21], co jest bardzo ważne dla inwestora, któremu zależy na podjęciu słusznej decyzji, czyli takiej, która nie będzie budziła jego wątpliwości i będzie w pełni zgodna z jego preferencjami.

5. Uwagi końcowe

Proponowane podejście do wielokryterialnej rozmytej nieliniowej optymalizacji portfela papierów wartościowych zrealizowane zostało za pomocą oryginalnej metody numerycznej, opartej na dwu - kryterialnym podejściu do porównywania przedziałów ostrych i rozmytych. Wprowadzone operacje matematyczne realizowane są za pomocą programowania obiektowego. Opracowana metoda sprawdzona została na przykładzie optymalizacji portfela papierów wartościowych, składającego się z pięciu akcji przy zastosowaniu trzech różnych metod agregacji kryteriów lokalnych. Udowodniono, że podejście wielokryterialne do optymalizacji portfela (w każdym z przypadków agregacji) jest uogólnieniem najbardziej renomowanych metod optymalizacji portfela. Podejście wielokryterialne nie tylko uogólnia podejście klasyczne, ale wyraźnie lepiej odzwierciedla naturę problemu optymalizacji portfela papierów wartościowych i co najważniejsze, jest to podejście prawidłowe, bowiem nie uwzględnia w portfelu tych papierów wartościowych, które charakteryzują się takim samym zyskiem, co inne papiery wartościowe, lecz mają wyższe ryzyko.

Referencje:

[1] Endre Pap, Zita Bosnjak, Sasa Bosnjak, *Application of fuzzy sets with diferent t-norms in the interpretation of portfolio matrices in strategic management*, Fuzzy Sets and Systems 114 (2000) 123.

[2] Hideo Tanaka, Peijun Guo, I. Burhan Turksen, *Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions,* Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) 387.

[3] H.M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efcient Diversifcation of Investments,* Wiley, New York, 1959.

[4] Masahiro Inuiguchi, Jaroslav Ramik, *Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem,* Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) 3

[5] Masahiro Inuiguchi , Tetsuzo Tanino, *Portfolio selection under independent possibilistic information,* Fuzzy Sets and Systems 115 (2000) 83

[6] Jacquillat B., *Les modèles dÕévaluation et de sélection des valeurs mobilières: Panorama des recherches américaines,* Analyse Financière (1972), 11, 4e trim, p. 68-88.

[7] Colson, G., Zeleny, M., 1979, *Uncertain prospects ranking and portfolio analysis under the condition of partial information,* Mathematical Systems in Economics 44, Verlag Anton Hain, Maisenheim.

[8] Zeleny, M., 1977, *Multidimensional measure of risk: The prospect ranking vector. in: Zionts, S. (Ed.), Multiple Criteria Problem Solving,* Springer, Heidelberg, pp. 529-548.
[9] Zeleny, M., 1982, *Multiple Criteria Decision Making,* Mc-Graw-Hill, New York.
[10] T. Lorenzana, N. Márquez, S. Sardà, *An aproach to the problem of portfolio selection,* Fuzzy Economic Review Number 1, Volume I. May 1996 62-74
[11] Peijun Guo, Hideo Tanaka, *Possibilistic data analysis and its aplication to portfolio selection problems,* Fuzzy Economic Review Number 2, Volume III. November 1998 1-11
[12] Francesc J. Ortí, José Sáez, Antonio Terceño, *On the treatment of uncertainty in portfolio selection,* Fuzzy Economic Review Number 2, Volume VII. November 2002 22-31
[13] Fortemps, M. Roubens, *Ranking and defuzzification methods based on area compensation,*
Fuzzy Sets and Systems (1996) 319-330.
[14] Linsmeier T. J., Pearson N. D., *Risk measurement : an introduction to value at risk,* Champaign, IL: University of Illinois, 1996
[15] L.A. Zadech, Fuzzy sets, Inform. And Control 8 (1965) 338-353
[16]Sewastianiow P.,Róg P., *Fuzzy Optimization Using Direct Crisp and Fuzzy Interval comparison"* Institute of Math. & Comp. Sci., Technical University of Częstochowa, st. 73,
[17] Monika Jończyk, Paweł Sewastianow *„Rozmyta optymalizacja portfela papierów wartościowych w warunkach niepewności*." Materiały do 15 Górskiej Szkoły PTI, Efektywność zastosowań systemów informatycznych Szczyrk 23-27.VI.2003 (Strony 145-155)