OTYMALIZCJA DYSTRYBUCJI W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI PROBABILISTYCZNEJ.

Marek Dolata, Aleksandra Ptak
marek@zapr.com.pl
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa

Streszczenie. Zagadnienie optymalizacji działalności dystrybutora sformułowane jako uogólnienie klasycznego problemu transportowego. Uwzględniono nie tylko koszty transportu ale ograniczenia związane z możliwością spełnienia kontraktu zawartego pomiędzy dystrybutorem i odbiorcami oraz między dystrybutorem i dostawcami. Otrzymano numeryczne rozwiązanie problemu w sytuacji stałych parametrów na przykładzie trzech odbiorców i trzech dostawców. Oprócz tego zagadnienie rozwiązywano w sytuacji niepewności parametrów modelu. Przy tym używano probabilistycznego podejścia do formalizacji niepewności.
Problem został rozwiązany algorytmem programowania liniowego simplex przy zastosowaniu liczb losowych z wykorzystaniem metody Monte-Carlo.
Ciekawym wynikiem zastosowania podejścia Monte-Carlo jest niejednoznaczność rezultatów. Otrzymane gęstości prawdopodobieństwa dla ilości dostaw są dwu ekstremalne. Jednocześnie oceniono ilość eksperymentów numerycznych losowych niezbędnych dla otrzymania adekwatnych rezultatów przy zastosowaniu procedury Monte-Carlo w zagadnieniu optymalizacji działalności dystrybutora.

Kluczowe słowa: Programowanie liniowe; problem dystrybutora; problem transportowy; niepewność probabilistyczna; metoda Monte-Carlo.

Abstract. The distributor's problem as the extension of well known classical transportation problem is considered. Not only the transportation costs but also the distributor’s possibility to fit all the contract with the customers and the salesmen. The probabilistic uncertainty of models parameters is taken into account. The Monte - Carlo approach is used to provide the numerical experiments with mathematical model obtained. As the result the probability distributions for all output characteristic of process considered have been obtained. It is interesting that the frequency distributions have two extremes. The number of model starting when realizing the Monte-Carlo procedure to get a smooth resulting probability distributions is estimated, too.

Keywords: Linear programming; distributor’s problem; transportation problem, Monte-Carlo method.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie optymalizacji działalności dystrybutora może być sformułowane jako uogólnienie klasycznego problemu transportowego. Konwencjonalny problem transportowy jest specjalnym typem programowania liniowego gdzie sam problem jak i ograniczenia są opisane szczególną matematyczną strukturą. Źródłem dostaw może być producent, magazyn itp. dla którego mamy przypisane odpowiednie parametry, podobnie jak dla celu dostaw; dodatkowo znane są koszty transportu na danych trasach. W klasycznym podejściu chodzi o minimalizację kosztów poniesionych przez pośrednika podczas transportowania towaru od M producentów do N konsumentów, w opisywanym podejściu postanowiono dokonać maksymalizacji zysku dystrybutora przy tych samych warunkach.

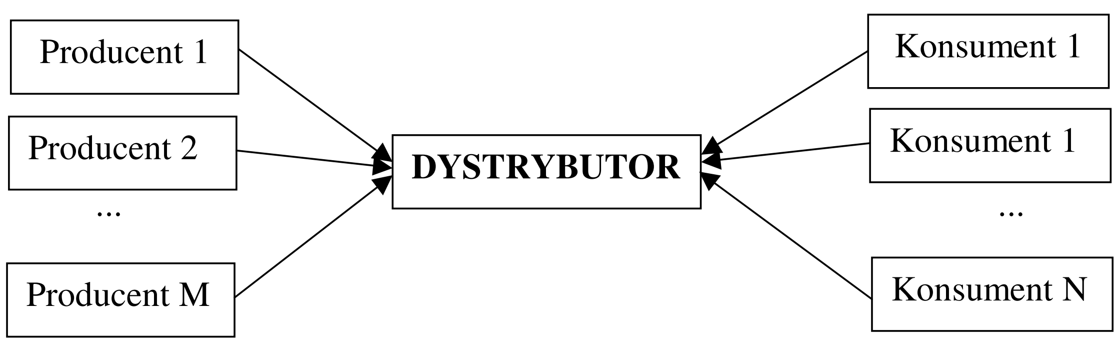
W 1979, Isermann [1] przedstawił algorytm, dla rozwiązywania problemu, przy pomocy którego został wyliczony komplet wszystkich skutecznych rozwiązań. Ringuest i Rinks [2] proponowali dwa algorytmy iteracyjne dla rozwiązywania liniowego wielokryterialnego problemu transportowego. Podobne rozwiązanie zaproponowane w [3].

Różne efektywne algorytmy zostały opracowane dla tego problemu transportowego ale z uwzględnieniem stałych parametrów zadania opisanych w postaci liczb rzeczywistych. Jednakże takie warunki są spełnione rzadko albo niemalże nigdy ze względu na wahania parametrów; przykładowo ciężko ustalić stały koszt dla określonej trasy. W pracy [4] taki problem był rozwiązany w warunkach przedziałowej niepewności kosztów transportowych.

W pracach S.Chanasa i D. Kuchty [5, 6] rozwinięto podejście oparte na rozmyto przedziałowym przedstawieniu niepewnych parametrów modelu. Rozwój tego podejścia przedstawiony jest w pracy [7], jednak w literaturze brakuje prac poświęconych uwzględnieniu niepewności parametrów modelu o charakterze probabilistycznym. Dlatego w artykule przedstawione są rezultaty numerycznego rozwiązania problemu optymalizacji działalności dystrybutora w sytuacji kiedy niepewne parametry modelu opisane są za pomocą gęstości prawdopodobieństwa.

2. Problem dystrybutora uwzględniający rynkowe warunki

Problem dystrybutora można zdefiniować przyjmując, że pośrednik zaopatruje się u M producentów i dostarcza towar do N konsumentów Rys1.



Rys. 1. Graficzna prezentacja problemu dystrybutora

Założono, że wiadome są maksymalne możliwości producentów dotyczące ilości wyprodukowanego surowca wynoszące $\boldsymbol{a_i}$, (i=1,2,..., M) i maksymalne zdolności odbioru towarów przez konsumentów $\boldsymbol{b_j}$, (j=1, 2,...,N). Dystrybutor posiada informację o cenach za jednostkę towaru który kupuje u każdego producenta i o cenach sprzedaży dla każdego konsumenta. Wiadomo że straty na dostarczenie jednostki towaru od *i-tego* producenta do *j-tego* konsumenta są równe $\boldsymbol{c_{ij}}$, (i=1,2,..., M; j=1, 2,...,N). Zgodnie z zawartymi umowami dystrybutor jest zobowiązany kupować u *i-tego* producenta minimum $\boldsymbol{p_i}$ jednostek towaru po cenie $\boldsymbol{t_i}$ za jednostkę oraz gwarantować dostarczenie *j-temu* konsumentowi minimum $\boldsymbol{q_j}$ jednostek tego towaru po cenie $\boldsymbol{s_j}$ za jednostkę. Całą ilość towaru powyżej omówionej w kontrakcie wartości $\boldsymbol{p_i}$, dystrybutor kupuje po cenie promocyjnej $\boldsymbol{k_i}$ za jednostkę. Z kolei konsument kupuje całą ilość towaru powyżej $\boldsymbol{q_j}$ także po cenie promocyjnej $\boldsymbol{r_j}$ za jednostkę. Rozwiązaniem problemu są optymalizowane ilości towaru kupowanego u każdego *i– tego* producenta oraz dostarczonego i sprzedanego *j-temu* konsumentowi $\boldsymbol{x_{ij}}$ (i=1,2,..., M; j=1, 2,...,N) w warunkach ograniczeń związanych z podpisanymi umowami z producentami i konsumentami dotyczącymi ilości kupna i sprzedaży.

W wyniku dochód dystrybutora ***D*** może być przedstawiony przez wyrażenie

$$D=\sum_{j=1}^{N}\left(q_j * s_j\right)-\sum_{i=1}^{M}\left(p_i * t_i\right)-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left(c_{ij} * x_{ij}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{M}x_{ij}-q_j\right) * r_j-\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N}x_{ij}-p_i\right) * k_i \qquad (1)$$

W rezultacie zadanie redukuje się do znalezienia wszystkich $\boldsymbol{x_{ij}}$ maksymalizujących dochód ***D*** przy ograniczeniach:

- dotyczących górnych granic popytu i podaży

$$\sum_{j=1}^{N}x_{ij}\le a_i (i=1..M); \qquad \sum_{i=1}^{M}x_{ij}\le b_j (j=1..N); \qquad (2)$$

- dotyczących dolnych granic popytu i podaży

$$\sum_{j=1}^{N}x_{ij}\ge p_i (i=1..M); \qquad \sum_{i=1}^{M}x_{ij}\ge q_j (j=1..N); \qquad (3)$$

Postawiony w ten sposób problem można rozwiązać jako zadanie programowania liniowego przy wykorzystaniu algorytmów programowania liniowego.

Do rozwiązania przykładów numerycznych prezentujących opracowane metody zastosowano algorytm simplex odpowiednio zmodyfikowany w zależności od metody.

Jako podstawa do dalszej analizy rozważmy konkretny przykład kiedy dystrybutor współpracuje z trzema odbiorcami i z trzema dostawcami.

Przypuśćmy, że wszystkie parametry opisane są przez bazowe dane rzeczywiste

Dane są wartości w abstrakcyjnych jednostkach miary, j.m:

M=3; N=3 ;

a_1=460 j.m.	b_1=410 j.m.	p_1=440 j.m.	q_1=390 j.m.
a_2= 460 j.m.	b_2=510 j.m.	p_2=440 j.m.	q_2=490j.m.
a_3= 610 j.m	b_3=610 j.m.	p_3=590 j.m.	q_3=590j.m.

t_1=600 j.m.	s_1=1000 j.m.	k_1=590 j.m.	r_1=990 j.m.
t_2=491 j.m.	s_2=1130 j.m.	k_2=480 j.m.	r_2=1100 j.m.
t_3=581 j.m.	s_3=1197 j.m.	k_3=570 j.m.	r_3=1180 j.m.

c_{11}=100 j.m.	c_{12}=30j.m.	c_{13}=100 j.m.
c_{21}=110 j.m.	c_{22}=36 j.m.	c_{23}=405 j.m.
c_{31}=120 j.m.	c_{32}=148 j.m.	c_{33}=11 j.m.

Stosując algorytm programowania liniowego simplex zgodnie z zależnościami (1),(2),(3) wyniki kształtują się w następujący sposób:

x_{11}=410 j.m.	x_{12}=50 j.m.	x_{13}=0 j.m.
x_{21}=0 j.m.	x_{22}= 460 j.m.	x_{23}= 0 j.m.
x_{31}=0 j.m.	x_{32}=0 j.m.	x_{33}=610 j.m.

gdzie x_{ij} – optymalizowane ilość towaru kupowana u i – tego producenta i sprzedawana j – temu konsumentowi.

Optymalizowany dochód całkowity dystrybutora w rozpatrywanej sytuacji wynosi D=781030 j.m.

Ze względu na to, że parametry, które podaje decydent jako zmienne decyzyjne jak również uzyskane wyniki są liczbami rzeczywistymi to zasadność stosowania takiego algorytmu w warunkach panującej na rynku niepewności jest niewielka. Nie pozwala on na podejmowanie optymalizowanych decyzji jednak umożliwia porównanie rozwiązań z innymi algorytmami które używają jako dane wejściowe np. liczb rozmyto-przedziałowych.

3. Rezultaty zastosowania metody Monte-Carlo do rozwiązywania problemu dystrybutora.

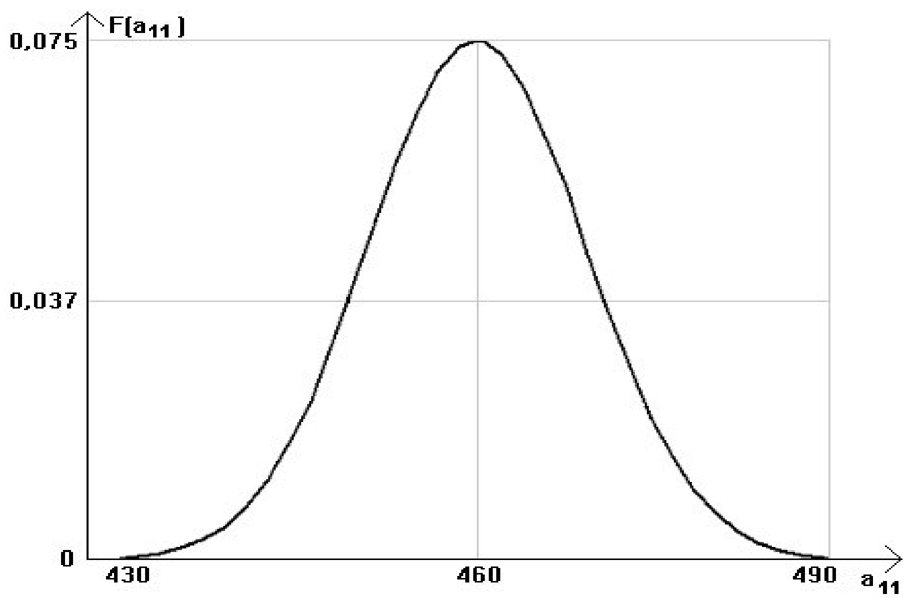
Przedstawiony problem powinien uwzględniać zmiany parametrów wejściowych podawanych przez decydenta takich jak koszty na poszczególnych trasach czy maksymalne zdolności wytwórcze producenta lub odbiorcze konsumenta oraz możliwość wahań cen. Podejście takie pozwoli na obiektywną ocenę sytuacji panującej na rynku, a co za tym idzie na podjęcie optymalizowanej decyzji w warunkach niepewności.

Z tego też względu opracowane zostało podejście probabilistyczne uwzględniające możliwość wahań parametrów decyzyjnych zgodnie z podanym przez decydenta odchyleniem standardowym. Korzystając z zależności (1), (2) i (3) oraz z algorytmu programowania liniowego simplex opisanego powyżej rozwiązano problem transportowy wykorzystując wielokrotne losowanie parametrów wejściowych zadania zgodnie z podaną przez decydenta wartością średnią i odchyleniem standardowym. W wyniku przeprowadzonych losowań parametry wejściowe podobnie jak i optymalizowane wielkości będące rozwiązaniem problemu reprezentowane są w postaci rozkładu prawdopodobieństwa. Dokładność wyników wzrasta wraz z ilością przeprowadzanych losowań, w związku z czym algorytm ten jest bardzo czasochłonny.

Na podstawie otrzymanych w postaci rozkładu prawdopodobieństwa wyników dla poszczególnych tras otrzymujemy rozwiązanie optymalne pozwalające na ocenę w jakich granicach i z jakim ryzykiem ustalić ilość towaru transportowaną od *i-tego* producenta do *j-tego* konsumenta.

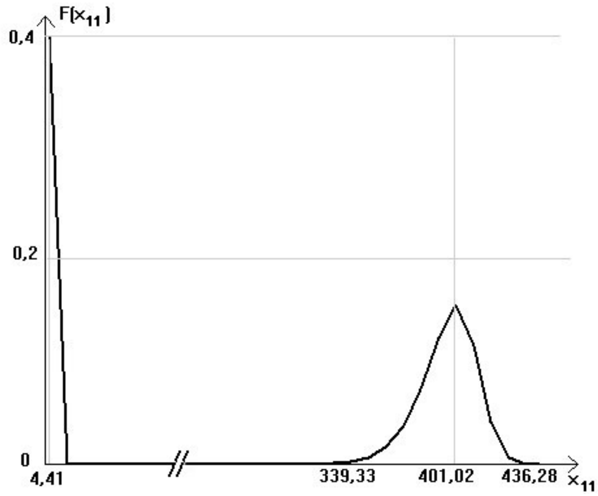
W zastosowanej metodzie posłużono się tymi samymi bazowymi danymi wejściowymi co i w rozdziale 2, traktując je jednak jako wartości średnie dodatkowo podając odchylenie standardowe. Odchylenie standardowe dla opisywanego przykładu wynosiło σ=10 j.m. dla każdej zmiennej decyzyjnej równania (1) i ograniczeń (2) i (3).

Przeprowadzono 1000000 prób obliczeń przy wykorzystaniu algorytmu simplex dla losowanych z uwzględnieniem wartości średniej i odchylenia standardowego wszystkich zmiennych decyzyjnych. Dane wejściowe po 1000000 prób układają się w kształcie przebiegu, który odpowiada rozkładowi Gaussa. Przykład $F(a_1)$ dla zmiennej a_1=460 j.m. σ=10 j.m. przedstawiono na rysunku 2.

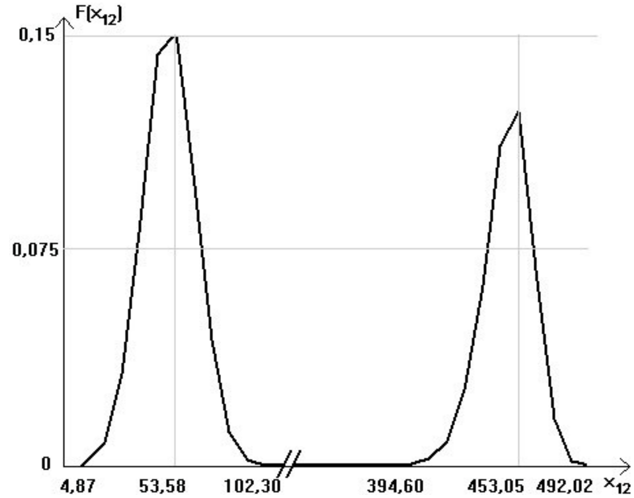


Rys. 2. Rozkład gęstości zmiennej a_{11} dla miliona prób.

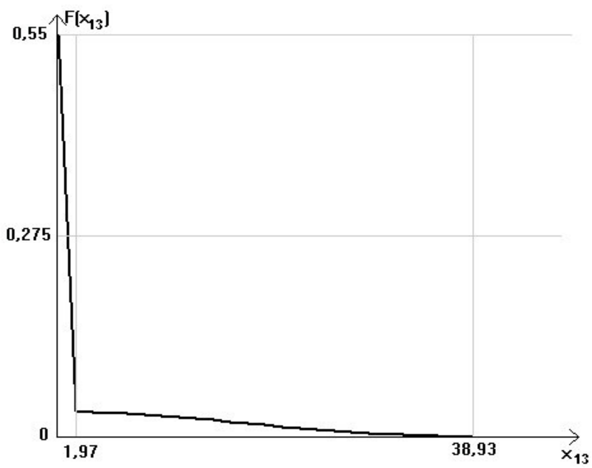
W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano wyniki, które przedstawione zostały na rysunkach Rys. 3 do Rys. 9.



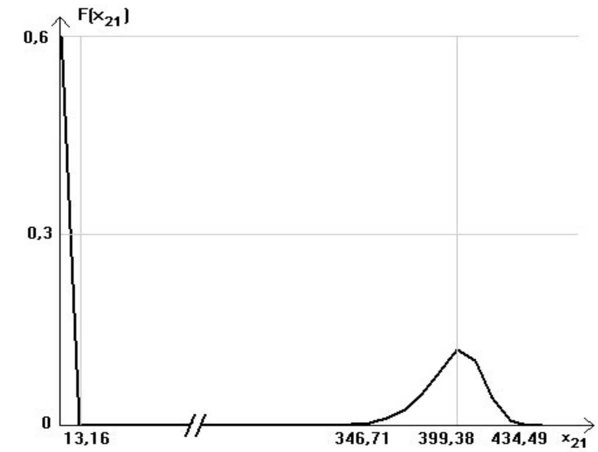
Rys. 3. Wynik reprezentujący rozkład zmiennej x_{11}.



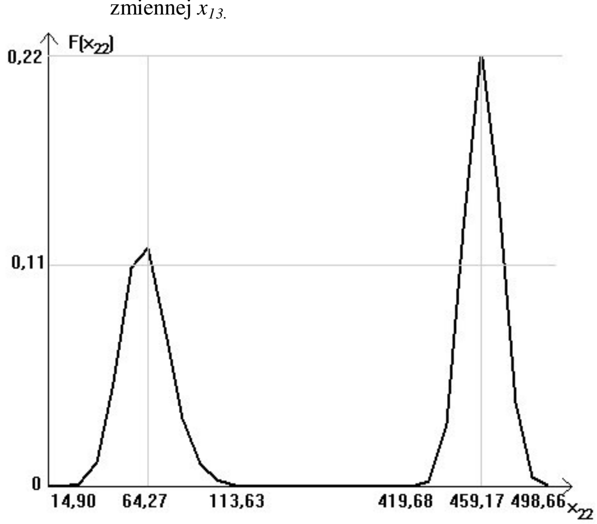
Rys. 4. Wynik reprezentujący rozkład zmiennej x_{12}.



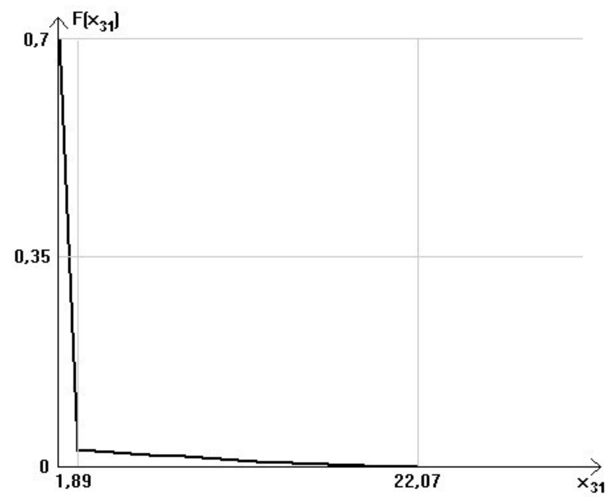
Rys. 5. Wynik reprezentujący rozkład zmiennej x_{13}.



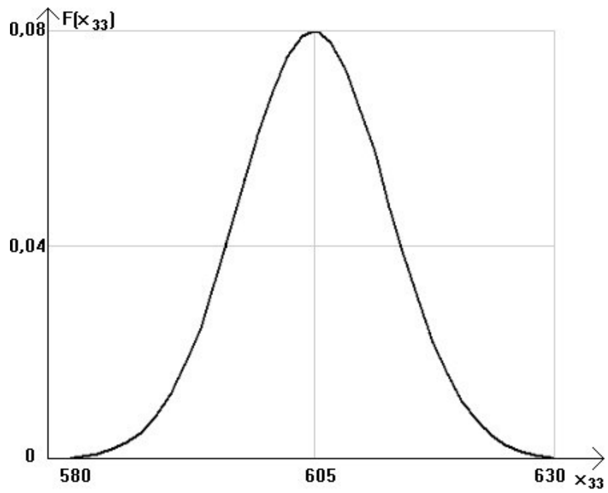
Rys. 6. Wynik reprezentujący rozkład zmiennej x_{21}



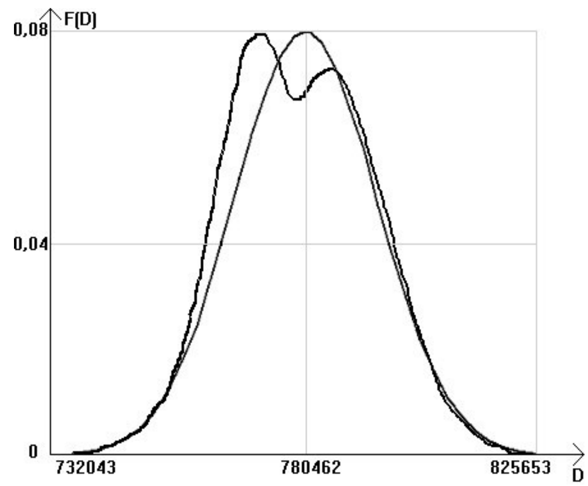
Rys. 7. Wynik reprezentujący rozkład zmiennej x_{22}.



Rys. 8. Wynik reprezentujący rozkład zmiennej x_{31}.



Rys. 9. Wynik reprezentujący rozkład zmiennej x_{33}.



Rys. 10. Optymalizowany dochód całkowity dystrybutora D.

Jak widać na otrzymanych rysunkach rezultaty zastosowania metody Monte-Carlo są niejednoznaczne. Z innej strony porównując wynikowe gęstości zmiennych losowych i rozwiązania bazowe bez uwzględnienia niepewności (rozdział 2) można w sposób jednoznaczny ustalić które z otrzymanych gęstości w większym stopniu odpowiada rozwiązaniu optymalizowanemu. Porównując dane rozdziałów 2 i 3 łatwo zauważyć, że rzeczywistym optymalizowanym rozwiązaniem odpowiadają gęstości prawdopodobieństwa charakteryzujące się większymi częstotliwościami. Z rysunku 10 wynika, że dla otrzymania dość gładkich gęstości prawdopodobieństwa rezultatów rozwiązania zadania optymalizacji działalności dystrybutora potrzebne około 1 000 000 uruchomień bazowego algorytmu na podstawie metody simplex.

4. Podsumowanie

Zastosowanie procedury Monte-Carlo jednocześnie z metodą simplex dla rozwiązywania zagadnienia optymalizacji działalności dystrybutora w warunkach probabilistycznej niepewności parametrów powoduje otrzymanie wyników niejednoznacznych. Tak, gęstości prawdopodobieństwa optymalizowanych x_{ij} (ilość towaru kupowana u i – tego producenta i sprzedawana j – temu konsumentowi) mają dwa wyraźne ekstrema. Ustalono, że prawidłowy wybór optymalizowanego rozwiązania w tych warunkach może być dokonane za pomocą porównywania rozwiązania w warunkach niepewności i bazowego rozwiązania opartego na średnich wartościach parametrów niepewnych. Wyraźnie pokazano, że dla otrzymania dość gładkich gęstości prawdopodobieństwa opisujących wyniki rozwiązania zadania optymalizacji z użyciem procedury losowania Monte-Carlo potrzebna jest bardzo duża ilość uruchomień (około 1 000 000) bazowego zagadnienia optymalizacji za pomocą metody simplex. Ostatni wniosek można rozpatrywać jako uzasadnienie dla zastosowania w optymalizacji działalności dystrybutora innych metod modelowania niepewności np. metod teorii zbiorów rozmytych.

LITERATURA

[1] H. Isermann, The enumeration of all efficient solution for a linear multiple-objective transportation problem, Naval Research Logistics Quarterly 26 (1979) 123-139;

[2] J.L. Ringuest, D.B. Rinks, Interactive solutions for the linear multiobjective transportation problem, European Journal of Operational Research 32 (1987) 96-106.

[3] A.K. Bit, M.P. Biswal, S.S. Alam, Fuzzy programming approach to multicriteria decision making transportation problem, Fuzzy Sets and Systems 50 (1992) 135-142.

[4] S.K. Das, A. Goswami, S.S. Alam , Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters, European Journal of Operational Research 117 (1999) 100-112

[5] S. Chanas, M. Delgado, J.L Verdegay and M.A. Vila, Interval and fuzzy extensions of classical transportation problems, Transportation Planning Technol. 17(1993) 203-218.

[6] S. Chanas, D. Kuchta, Fuzzy integer transportation problem, Fuzzy Sets and Systems 98 (1998) 291-298

[7] Waiel F. Abd El-Wahed, A multi-objective transportation problem under fuzziness, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001) 27{33