ROZMYTA OPTYMALIZACJA PORTFELA PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH.

P. Sewastianow, M. Jończyk
e-mail sevast@k2.pcz.czest.pl , monikjon@wp.pl
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, Politechnika Częstochowska
ul Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa

1. Wstęp

Problem optymalizacji portfela papierów wartościowych jest jednym z ważniejszych zagadnień w teorii i praktyce działalności finansowych. W pionierskiej pracy Markowitza [3] zagadnienie portfelowe rozwiązano z uwzględnieniem niepewności informacji wstępnych (ceny akcji oraz ich dochodowości) za pomocą metod teorii prawdopodobieństwa, przy tym parametry niepewne przedstawione zostały w postaci gęstości zmiennych losowych. Poważnym uproszczeniem realnej sytuacji używanym w ramach klasycznego podejścia jest rozpatrywanie tylko jednego kryterium. Zakładano, że inwestor ma na celu minimalizację np. ryzyka przy gwarantowanym poziomie dochodu lub przeciwnie maksymalizację dochodu przy ograniczonym poziomie ryzyka. Jednak w praktyce, możliwości tego bardzo atrakcyjnego z teoretycznego punktu widzenia podejścia są ograniczone właśnie naturą rynku finansowego. Jak udowodnili czołowi amerykańscy specjaliści w tej dziedzinie [18], główne założenie teorii Markowitza o występowaniu normalnych rozkładów prawdopodobieństwa opisujących parametry finansowe, najczęściej nie zdarza się w praktyce. Oprócz tego rozkłady prawdopodobieństw nie są stałe, z czego wynika ze trudno przewidywać ich formy, jeżeli chodzi o planowanie przyszłego portfela. Wymienione problemy zastały w dużej mierze rozwiązane wraz z pojawieniem się teorii zbiorów rozmytych [19]. Dziś można przytoczyć cały szereg prac w tej dziedzinie [1]-[5], [8], [11]-[13]. Główną zaletą podejścia rozmytego jest możliwość zmiany gęstości prawdopodobieństwa parametrów finansowych przez odpowiednie dobranie funkcji przynależności zbiorów rozmytych, co pozwala na uwzględnienie dowolnej struktury danych otrzymanych w trakcie badań statystycznych rynku papierów wartościowych. Hipoteza normalności rozkładów prawdopodobieństw nie jest już potrzebna, dodatkową zaletą jest także możliwość wykorzystania wiedzy, doświadczenia i intuicji ekspertów do opisania funkcji przynależności. Prawie wszystkie wymienione powyżej prace, redukują sformułowane w sposób rozmyty zagadnienie do szeregu związanych między sobą problemów programowania liniowego. Przy tym używane są różnego rodzaju aproksymacje liniowe funkcji przynależności opisujących parametry finansowe, co można rozpatrywać jako poważne ograniczenie, ze względu na to, że rzeczywiste funkcje przynależności otrzymane w trakcie badań statystycznych rynku finansowego mogą mieć bardzo skomplikowane formy. Tylko w [13] problem portfelowy sformułowany został jako zagadnienie programowania nieliniowego. Warto zaznaczyć, że wszystkie wymienione powyżej podejścia oparte na metodach teorii zbiorów rozmytych , naśladują w pewnym sensie ideologię klasycznego podejścia

Markowitza, ponieważ wyodrębniają tylko jedno kryterium , które trzeba maksymalizować lub minimalizować w zależności od sytuacji. Wynika z tego, że istniejące podejścia do problemu portfelowego w ramach teorii zbiorów rozmytych są w gruncie rzeczy jednokryterialne.

Jednak wielokryterialność problemu portfelowego odnotowana została jeszcze na poziome merytorycznym przez specjalistów z dziedziny finansów [7], [8], [9], [10].

W przedstawianym artykule zagadnienie optymalizacji portfela sformułowane zostało w formie zagadnienia wielokryterialnego , nieliniowego, rozmytego programowania. Uwzględniono rywalizujące lokalne kryteria maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka. W trakcie realizacji algorytmu numerycznego realizującego proponowaną metodę używamy oryginalnego probabilistycznego podejścia do porównywania liczb rozmytych.

2. Narzędzia matematyczne.

Ponieważ w ramach proponowanego podejścia używamy bezpośrednio operacji na liczbach rozmytych , poniżej przedstawione zostały podstawowe pojęcia z teorii zbiorów rozmytych.

Zbiór rozmyty *A* możemy zdefiniować jako:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \quad \mu_A(x) \in [0,1]\},$$

gdzie $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ jest funkcją przynależności elementów *X* do zbioru *A*.

Funkcja przynależności stanowi uogólnienie funkcji charakterystycznej, zbiór rozmyty zaś – uogólnienie zbioru zwykłego.

Najbardziej konstruktywnym podejściem do implementacji arytmetyki rozmytych przedziałów jest podejście oparte na reprezentacji przedziału rozmytego za pomocą α- przekrojów .

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_{\alpha},$$

gdzie A_α jest przedziałem $\{x: \mu_A(x) \geq \alpha\}$, αA_α jest przedziałem rozmytym $\{(x, \alpha): x \in A_\alpha\}$.

Niech *A* i *B* będą rozmytymi przedziałami. Zostało udowodnione, że wszystkie operacje na tych rozmytych przedziałach mogą zostać sprowadzone do operacji na przedziałach ostrych odpowiadających α- przekrojom:

$$(A @ B)_\alpha = A_\alpha @ B_\alpha$$

Z tego powodu problemy arytmetyki przedziałów rozmytych można zredukować do problemu arytmetyki ostrych przedziałów.

W przypadku prezentacji liczby rozmytej w postaci α- przekrojów, która opiera się o liczby przedziałowe, należy przedstawić podstawowe pojęcia dotyczące arytmetyki przedziałowej.

Istnieje kilka definicji arytmetyki przedziałowej, ale udowodniono, że przy zastosowaniu ich w praktycznych aplikacjach tak zwana forma „naiwna” jest formą najlepszą. Według tego, jeśli $A = [a_1, a_2]$ i $B = [b_1, b_2]$ są przedziałami, wtedy

$$Z = A@B = \{ z = x@y, \quad \forall x \in A, \forall y \in B \}.$$

Bezpośrednią konsekwencją powyżej definicji są następujące wyrażenia:

$A+B=[a_1+b_1, b_2+b_2]$, $A-B=[a_1-b_2, a_2-b_1]$,

$A\cdot B=[min(a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2, a_1\cdot b_2, a_2\cdot b_1), max(a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2, a_1\cdot b_2, a_2\cdot b_1)]$,

$A/B=[a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]$

Oczywiście istnieje wiele wewnętrznych problemów stosowanej analizy przedziałowej, np. dzielenie przez przedział zawierający zero, ale generalnie może być ona rozważana jako dobre narzędzie matematyczne dla modelowania i podejmowania decyzji w warunkach niepewności.

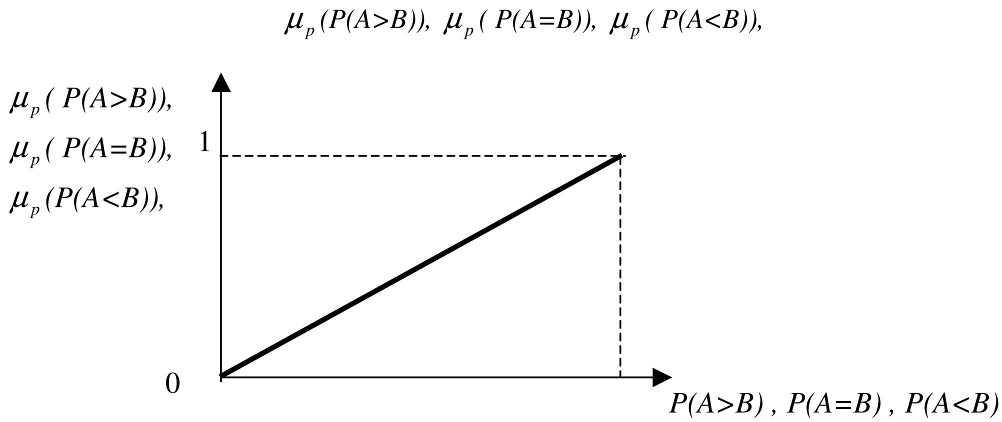
Ponieważ założone zostało, że liczba rozmyta reprezentowana będzie przez zbiór jej α-przekrojów, które są w gruncie rzeczy, zborem zwykłych przedziałów, można więc użyć arytmetyki przedziałowej, by rozwiązać problem porządkowania przedziałów rozmytych.

Kluczowym problemem w zagadnieniach optymalizacji rozmyto - przedziałowych jest porównywanie liczb lub przedziałów rozmytych. Oczywistym jest, że w ramach opisanego powyżej podejścia problem porównywania przedziałów rozmytych redukuje się do porównywania przedziałów ostrych. Należy zaznaczyć, że porównywanie przedziałów jest problemem bardzo kontrowersyjnym. Istnieją dziesiątki podejść do formułowania tej procedury, ale będziemy używali podejścia probabilistycznego, proponowanego w pracach [16] i [17]. Zaletą tego podejścia jest używanie tylko jednego podstawowego założenia, że przedział jest przedziałem stałej gęstości zmiennej losowej . Na podstawie tego, bez dodatkowych przypuszczeń, w pracach [16] i [17] udało się otrzymać kompletny zbiór wzorów dla prawdopodobieństwa nierówności P(A<B) i równości P(A=B) przedziałów ostrych i rozmytych oraz przedziałów i liczb rzeczywistych. Jednak zaproponowana w [16] i [17] metoda pozwala tylko na ocenę prawdopodobieństwa np. że B>A przy tym nie uwzględnia ona w sposób jawny stosunków szerokości porównywanych przedziałów, które mają dla nas poważne znaczenie. Rzeczywiście jeżeli chcemy maksymalizować rozmyto - przedziałowy dochód sumaryczny portfela inwestycji, jednocześnie chcielibyśmy zmniejszyć ryzyko finansowe przedstawione bezpośrednio po przez szerokości przedziałów w punkcie optimum tzn. że w trakcie realizacji algorytmu numerycznego na każdym jego kroku chcielibyśmy zwiększyć prawdopodobieństwo wzrostu otrzymanej przedziałowej/rozmyto przedziałowej wartości dochodu przy jednoczesnym zmniejszeniu szerokości reprezentującego ją przedziału.

Dlatego proponujemy dwu-kryterialne podejście dla porównywania przedziałów ostrych i rozmytych w zagadnieniach optymalizacji w warunkach niepewności (ryzyka).

Pierwsze kryterium lokalne może zostać wyrażone przez funkcję przydatności (dla problemu wyboru większego przedziału) przedstawioną na rys. 1. Zgodnie z tym kryterium, im większe jest prawdopodobieństwo A>B, tym większa wartość funkcji kryterialnej $\mu_p(P(A>B))$. Analogicznie dla przedziału B.

W ogólnym przypadku, można zapisać te kryteria jako:



Rys. 1. Kryterium użyteczności dla prawdopodobieństwa P(A>B) i P(A<B) i P(A=B)

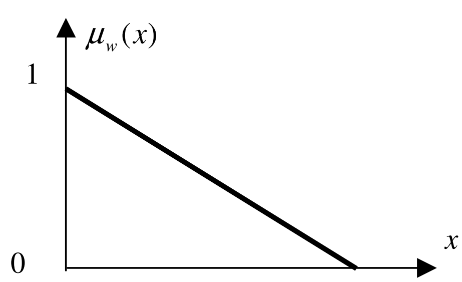
Drugie kryterium, związane z oceną ryzyka, może zostać przedstawione przez stosunek szerokości porównywanych przedziałów jak na Rys. 2.

W przypadku ogólnym, można kryterium to zapisać w następującej postaci:

$$\mu_w(x_A) = 1 - x_A \quad \text{, gdzie} \quad x_A = \frac{W_A}{\max(W_A, W_B)}$$

$$\mu_w(x_B) = 1 - x_B \quad \text{, gdzie} \quad x_B = \frac{W_B}{\max(W_A, W_B)}$$

Jasnym jest, że wartość kryterium jest tym większa, im mniejsza szerokość ocenianego przedziału, względem szerokości przedziału, z którym go porównujmy. W praktyce, dla przedziału szerszego wartość kryterium wynosi 0. Jeżeli np. porównujemy przedziały, A i B, i okazuje się, że przedział B jest szerszy, wówczas w x_B w mianowniku i liczniku występuje ta sama wartość, co daje wynik równy 1, w ten sposób kryterium $\mu_w(x_B) = 1 - 1 = 0$, natomiast w przeciwnym wypadku kryterium $\mu_w(x_A)$ =0. Dla przedziału o mniejszej szerokości, wartość kryterium jest tym większa im większa jest różnica szerokości pomiędzy przedziałami. Jeśli przedział węższy ma szerokość równą 0, wartość kryterium dla tego przedziału wynosi 1. W przypadku, kiedy oba przedziały mają szerokość równą 0, czyli są zdegenerowane, rozsądnym wydaje się przyjęcie dla obu przedziałów wartości tego kryterium równej 0, co wyeliminuje z oceny kryterium ryzyka, które traci w tym momencie swój sens.



Rys. 2. Kryterium użyteczności dla względnej szerokości przedziałów

Mamy dwa kryteria lokalne, które w praktyce zawsze zachowują się kontrowersyjnie , ponieważ otrzymanie większego zysku, bardziej prawdopodobne jest przy odpowiednim zwiększeniu ryzyka. Dlatego też wprowadzamy współczynniki względnej ważności kryteriów r_p, r_w charakteryzujące odpowiednio preferencje dycydenta, co do rentowności i ryzyka. Współczynniki te muszą spełniać ogólnie przyjęte ograniczenie

$(r_p + r_w)/2=1$.

Mając określone dla problemu optymalnej selekcji portfela lokalne kryteria prawdopodobieństwa i ryzyka oraz współczynniki ich względnej ważności można skonstruować globalne kryteria umożliwiające porównanie przedziałów, za pomocą najczęściej używanego addytywnego sposobu agregowania:

$$D_{A<B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A<B)) + r_w\mu_w(x_A)) \qquad (1),$$

$$D_{A>B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A>B)) + r_w\mu_w(x_B)) \qquad (2),$$

$$D_{A=B}(A,B) = \max(D'_{A=B}(A,B), D''_{A=B}(A,B)) \qquad (3)$$

gdzie:

$$D'_{A=B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A=B)) + r_w\mu_w(x_A))$$

$$D''_{A=B}(A,B) = \frac{1}{2}\cdot(r_p\mu_p(P(A=B)) + r_w\mu_w(x_B))$$

Przedstawione powyżej kryteria wymagają kilku słów komentarza.

Pierwsze kryterium globalne $D_{A<B}(A,B)$ dotyczy sytuacji w której, sprawdzamy spełnienie warunku $A < B$. Występują tu dwa kryteria lokalne μ_p-odpowiadające za zysk, określające prawdopodobieństwo przypadku że B>A, oraz μ_w -odpowiadające za ryzyko, czyli dotyczące szerokości przedziałów A i B. Drugie kryterium globalne $D_{A>B}(A,B)$ dotyczy sytuacji dokładnie przeciwnej do opisanej powyżej, a więc przypadku gdy A > B. Trzecie kryterium globalne dotyczy sytuacji gdy A=B. Kryterium to składa się z dwóch podkryteriów globalnych: $D'_{A=B}(A,B)$ i $D''_{A=B}(A,B)$, równe jest temu podkryterium, które jest większe. Podkryteria $D'_{A=B}(A,B)$ i $D''_{A=B}(A,B)$ skonstruowane są na tej samej zasadzie jak kryterium globalne pierwsze i drugie, czyli z dwóch kryteriów lokalnych.

3. Metoda rozmyta optymalizacji portfela papierów wartościowych

Sformułujemy zadanie optymalizacji portfela jako uogólnienie klasycznego podejścia

Rozmyty dochód sumaryczny portfela:

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \hat{C}_j \tag{4}$$

gdzie: $\hat{F}$ – rozmyto- przedziałowy dochód portfela ; x_j – udział akcji j w portfelu (liczba rzeczywista);

$\hat{C}_j$ – rozmyto- przedziałowa stopa zysku z j akcji .

Jednocześnie będziemy używać standardowego ograniczenia :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \tag{5}$$

Oczywiście problem polega na maksymalizacji dochodu $\hat{F}$ w sensie opisanego w rozdziale 2 podejścia probabilistycznego przy jednoczesnym wypełnieniu kryterium minimalizacji ryzyka , czyli minimalizacji szerokości $\hat{F}$. Dlatego w zgodzie z wynikami z rozdziału 2 metoda numeryczna dwu kryterialnej maksymalizacji $\hat{F}$ z uwzględnieniem wzorów (1)-(3) może być przedstawiona jako stopniowe (krok po kroku) maksymalizowanie globalnego kryterium mającego postać :

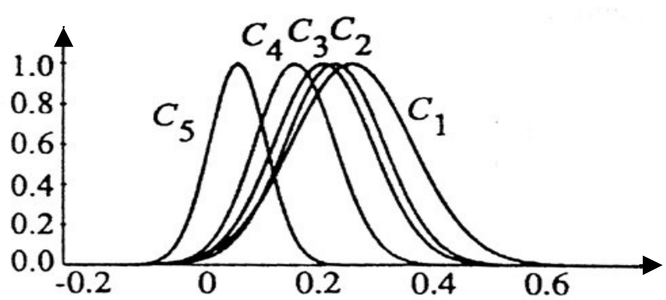
$$D_{\hat{F}_k < \hat{F}_{k+1}}(\hat{F}_k, \hat{F}_{k+1}) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p (P(\hat{F}_k < \hat{F}_{k+1})) + r_w \mu_w (x_{\hat{F}_k})) \tag{6}$$

gdzie: *k*- numer poszczególnych kroków przejść algorytmu, $\hat{F}_{\boldsymbol{k}}$- dochód rozmyto- przedziałowy (patrz wyrażenie (4)) w kroku *k*, $\mu_w(x_{\hat{F}_k}) = 1 - x_{\hat{F}_k}$ - kryterium lokalne odpowiadające za ryzyko, $x_{\hat{F}_k} = \frac{W_{\hat{F}_k}}{\max(W_{\hat{F}_k}, W_{\hat{F}_{k+1}})}$, $W_{\hat{F}_k}$ -szerokość przedziału funkcji *F* w kroku *k*, $W_{\hat{F}_{k+1}}$ -szerokość przedziału funkcji *F* w kroku *k+1*, $\mu_p(P(\hat{F}_k < \hat{F}_{k+1}))$ - kryterium lokalne odpowiadające za zysk.

W celu realizacji algorytmu numerycznego opracowane zostało rozmyto - przedziałowe rozszerzenie algorytmu bezpośredniego poszukiwania losowego [15]. Do tego algorytmu została wprowadzona dodatkowa metoda losowego wyboru wektora $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ umożliwiająca spełnienie ograniczenia (5), z określoną dokładnością ε, na każdym kroku algorytmu. Wszystkie operacje rozmyto przedziałowe w tym operacja porównywania przedziałów rozmytych opracowane zostały za pomocą programowania obiektowego.

4.Przykład dwu-kryterialnej, rozmytej optymalizacji portfela pięciu akcji.

W celu porównywania rezultatów otrzymanych za pomocą proponowanego podejścia z wynikami innych autorów, użyliśmy przykładu dokładnie przedstawionego w [4]. W tej pracy rozpatrywano przykład portfela składającego się z pięciu rodzajów papierów wartościowych, przewidywane zyski opisane są funkcjami przynależności podobnymi do normalnych rozkładów Gaussa (patrz Rys. 3)



Rys. 3 Rozmyto-przedziałowe wartości oczekiwanego zysku z akcji C_1,C_2,C_3,C_4,C_5, [4]

Zgodnie z metodologią opisaną w rozdziale 2, przedstawione powyżej funkcje przynależności zostały przekształcone w odpowiednie zbiory α-przekrojów po czym zastosowano procedurę optymalizacji opisaną w rozdziale 3. W tabeli 1, przedstawione zostały wyniki otrzymane dla różnych współczynników względnej ważności kryteriów maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka . Należy zaznaczyć, że w trakcie zmiany wartości tych współczynników otrzymano (jako przypadki szczegółowe) wszystkie rezultaty przedstawione w pracy [4], wynikające z najbardziej renomowanych jednokryterialnych metod : Markowitza, Kataoki, minimalnego ryzyka, minimalizacji rozpiętości, fraktalnych, „Modality model", „Minimax regret model".

Tabela1.Uzyskane wyniki

Współczynnik względnej ważności zysku r_p	**Współczynnik względnej ważności ryzyka r_w**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	0	1	0	0	0	0
0,5971	1,4029	0,70	0,30	0	0	0
0,5970	1,4030	0,6	0,4	0	0	0
0,5969	1,4031	0,44	0,56	0	0	0
0,5968	1,4032	0,23	0,77	0	0	0
0,5960	1,4040	0	1	0	0	0
0,4000	1,6000	0	0,99	0	0	0
0,2620	1,7380	0	0,9224	0	0,0685	0
0,2600	1,7400	0	0,35	0	0,64	0
0,2500	1,7500	0	0	0	0,99	0
0,2420	1,7580	0	0	0	0,76	0,23
0,2400	1,7600	0	0	0	0,18	0,82
0,2300	1,7700	0	0	0	0	0,99

Przeanalizujmy otrzymane wyniki.

W kolumnie pierwszej znajdują się zmniejszające się współczynniki względnej ważności zysku, począwszy od 2 do 0. W kolumnie drugiej odpowiadające współczynnikom względnej ważności zysku, współczynniki względnej ważności ryzyka, spełniające zasadę $(r_p + r_w)/2=1$. Zmniejszenie współczynnika względnej ważności zysku oznacza zwiększenie współczynnika ryzyka. W kolumnie 3- 7 umieszczone są wartości udziału poszczególnych rodzajów akcji w portfelu X_1-X_5, są to konkretne wartości liczbowe. Przy czym udział x_i dotyczy akcji C_i , i=1,…,5. Rodzaje poszczególnych akcji umieszczone są (patrząc od lewej do prawej) od tych z największym oczekiwanym średnim zyskiem (i największym ryzykiem) do tych z najmniejszym zyskiem (i najmniejszym ryzykiem). Analizując powyższe wyniki wyraźnie widać, że wraz ze zwiększeniem współczynnika ważności ryzyka do portfela akcji zostają wybierane akcje z mniejszym oczekiwanym średnim zyskiem.

Przyjrzyjmy się uważniej uzyskanym wynikom. Dla współczynnika względnej ważności zysku równego 2 do portfela akcji wybierany jest pierwszy rodzaj akcji C_1.

Dla współczynnika względnej ważności zysku równego 0,5960 do portfela akcji wybrany został tylko C_2- rodzaj akcji. Sytuacja ta odpowiada wynikowi uzyskanemu przy zastosowaniu modelu fraktalnego (patrz [4]).

Przeanalizujmy wyniki uzyskane dla współczynników względnej ważności zysku zmieniających się od 0,5971 do 0,5968 wówczas do portfela akcji wybierane są akcje typu C_1 i C_2. Wraz ze zmianą układów rang zmieniają się proporcje wziętych do portfela akcji. Wraz ze zmniejszaniem współczynnika względnej ważności zysku wybierana jest większa ilość akcji typu C_2. Jest to jak najbardziej zrozumiałe i oczywiste. Akcje typu C_2 charakteryzują się mniejszym oczekiwanym średnim zyskiem, a więc przy zmniejszaniu współczynnika względnej ważności zysku wybierana jest większa ilość tych właśnie akcji.

Podobną sytuację obserwujemy dla współczynników względnej ważności zysku zmieniających się od 0,262 do 0,26. W tym wypadku do portfela akcji wybrane zostały dwa typy akcji: akcje typu C_2 i akcje typu C_4. Tak jak poprzednio wraz ze zmianą układów współczynników względnych ważności kryteriów zmieniają się proporcje wybranych do portfela akcji. Co ciekawe wynik uzyskany dla współczynnika ważności zysku równego 0,26, odpowiada rezultatowi uzyskanemu przy zastosowaniu modelu minimalizacji rozpiętości (patrz [4]).

Obserwując wyniki uzyskane przy dwukryterialnym podejściu rozmytym, a zgromadzone w tabeli 1, można zauważyć, że akcje typu C_3 nigdy nie są brane do portfela akcji. Dzieje się tak ze względu na to że przegrywają one w rywalizacji z akcjami typu C_2- które to charakteryzują się większym średnim oczekiwanym zyskiem, a przy tym charakteryzują się taka samą niepewnością co akcje typu C_3 .

5. Uwagi końcowe

Proponowane podejście do wielokryterialnej, rozmytej, nieliniowej optymalizacji portfela papierów wartościowych zrealizowane zostało za pomocą oryginalnej metody numerycznej opartej na dwu - kryterialnym podejściu do porównywania przedziałów ostrych i rozmytych. Wprowadzone operacje matematyczne realizowane są za pomocą programowania obiektowego. Opracowana metoda sprawdzona została na przykładzie optymalizacji portfela papierów wartościowych składającego się z pięciu akcji. Udowodniono ze podejście wielokryterialne do optymalizacji portfela jest uogólnieniem wszystkich najbardziej renomowanych metod optymalizacji portfela jednokryterialnego , przy tym rezultaty otrzymane w oparciu o przedstawione podejście są szczególnymi przypadkami realizacji zagadnienia wielokryterialnego dla konkretnie wybranych współczynników względnej ważności kryteriów lokalnych , maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka. Podejście wielokryterialne nie tylko uogólnia podejście klasyczne ale wyraźnie lepiej odzwierciedla naturę problemu optymalizacji portfela papierów wartościowych .

Referencje:

[1] Endre Pap, Zita Bosnjak, Sasa Bosnjak, *Application of fuzzy sets with diferent t-norms in the interpretation of portfolio matrices in strategic management*, Fuzzy Sets and Systems 114 (2000) 123.
[2] Hideo Tanaka, Peijun Guo, I. Burhan Turksen, *Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions,* Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) 387.
[3] H.M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efcient Diversifcation of Investments,* Wiley, New York, 1959.
[4] Masahiro Inuiguchi, Jaroslav Ramik, *Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem,* Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) 3

[5] Masahiro Inuiguchi , Tetsuzo Tanino, *Portfolio selection under independent possibilistic information,* Fuzzy Sets and Systems 115 (2000) 83
[6] C. Zopounidis, *Multicriteria decision aid in financial management*, European Journal of Operational Research 119 (1999) 404-415
[7] Jacquillat B., *Les modèles dÕévaluation et de sélection des valeurs mobilières: Panorama des recherches américaines,* Analyse Financière (1972), 11, 4e trim, p. 68-88.
[8] Colson, G., Zeleny, M., 1979, *Uncertain prospects ranking and portfolio analysis under the condition of partial information,* Mathematical Systems in Economics 44, Verlag Anton Hain, Maisenheim.
[9] Zeleny, M., 1977, *Multidimensional measure of risk: The prospect ranking vector. in: Zionts, S. (Ed.), Multiple Criteria Problem Solving,* Springer, Heidelberg, pp. 529-548.
[10] Zeleny, M., 1982, *Multiple Criteria Decision Making,* Mc-Graw-Hill, New York.
[11] T. Lorenzana, N. Márquez, S. Sardà, *An aproach to the problem of portfolio selection,* Fuzzy Economic Review Number 1, Volume I. May 1996 62-74
[12] Peijun Guo, Hideo Tanaka, *Possibilistic data analysis and its aplication to portfolio selection problems,* Fuzzy Economic Review Number 2, Volume III. November 1998 1-11
[13] Francesc J. Ortí, José Sáez, Antonio Terceño, *On the treatment of uncertainty in portfolio selection,* Fuzzy Economic Review Number 2, Volume VII. November 2002 22-31
[14] Kaufmann A., Gupta M, *Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1985 – 349 p.
[15] Fortemps, M. Roubens, *Ranking and defuzzification methods based on area compensation,* Fuzzy Sets and Systems (1996) 319-330.
[16] P. Sewastianow, P. Róg, K. Karczewski, *A Probabilistic Method for Ordering Group of Intervals*, Informatyka teoretyczna i stosowana/Computer Science. P.Cz., Rocznik 2, 2 (2002), s. 45-53
[17] Paweł Sewastianow, Paweł Róg, *A Probability Approach to Fuzzy and Crisp Intervals Ordering,* Task Quarterly 7 No 1 (2003), 147-156, Politechnika Częstochowska
[18] Linsmeier T. J., Pearson N. D., *Risk measurement : an introduction to value at risk,* Champaign, IL: University of Illinois, 1996
[19] L.A. Zadech, Fuzzy sets, Inform. And Control 8 (1965) 338-353